演習問題

[1] 次を解け.

(1) $(3x+2y+1)\,dx + (2x-y-4)\,dy = 0$

(2) $(2x+e^{y})\,dx + x\cdot e^{y}\cdot dy = 0$

(3) $y\cdot\cos(xy)\cdot dx + (2y+x\cdot\cos(xy))\cdot dy = 0$, $y(\pi)=1$.

(4) $(y^{2}+e^{x}\cdot\sin y)\,dx + (2xy+e^{x}\cdot\cos y)\,dy = 0$.

[2] 次の全微分方程式について.かっこ内で与えられた関数が積分因子であることを示し.一般解を求めよ.

(1). $\sin y\cdot dx + \cos\,dy = 0 \quad (e^{x})$

(2) $y\cdot dx - x\cdot dy - x(x+y)^{2}\cdot dx = 0 \quad \left(\dfrac{1}{(x+y)^{2}}\right)$

[3] 次の全微分方程式について、$x^{m}\cdot y^{n}$が積分因子になるための.m, nの条件を導き.次を解け.

(1) $3y^{2}\cdot dx + 4xy\cdot dy = 0$

(2) $y\cdot\cos x\cdot dx + 2\sin x\cdot dy = 0$

解答

1 (1) $\dfrac{\partial}{\partial y}(3x+2y+1)=2$, $\dfrac{\partial}{\partial x}(2x-y-4)=2$ より これは完全．

∴ 公式3より

$$u(x,y)=\int 3x+2y+1\,dx+\int 2x-y-4\,dy-\iint 2\,dx\,dy$$

$$=\frac{3}{2}x^2+2xy+x+2xy-\frac{1}{2}y^2-4y-2x$$

$$=\frac{3}{2}x^2+2xy+x-\frac{1}{2}y^2-4y$$ とすれば．

$u(x,y)=C$ が一般解 より

$3x^2+4xy+2x-y^2-8y=c$ $(2c\to c)$ が解である．

(2) $\dfrac{\partial}{\partial y}(2x+e^y)=e^y$, $\dfrac{\partial}{\partial x}(x\cdot e^y)=e^y$

より．これは完全． ∴公式3より

$$u(x,y)=\int 2x+e^y\,dx+\int x\cdot e^y\,dy-\iint e^y\,dx\,dy$$

$$=x^2+x\cdot e^y+x\cdot e^y-x\cdot e^y=x^2+x\cdot e^y$$ となり

$x^2+x\cdot e^y=c$ が解である．

(3) $\dfrac{\partial}{\partial y}(y\cdot\cos(xy))=\cos xy-xy\cdot\sin(xy)$

$\dfrac{\partial}{\partial x}(2y+x\cdot\cos(xy))=\cos xy-xy\sin(xy)$ より．これは完全．∴公式3より．

$$u(x,y)=\int y\cdot\cos xy\,dx+\int 2y+x\cdot\cos(xy)\,dy-\iint \cos xy-xy\cdot\sin xy\cdot dx\cdot dy$$

$$=y^2+\sin(xy)$$ となる．

∴ $y^2+\sin(xy)=C$ が一般解である．さらに．$y(\pi)=1$ より

$1^2+\sin\pi=C$ となり．$C=1$ ， ∴ $y^2+\sin(xy)=1$ が求める解である．

(4) $\frac{\partial}{\partial y}(y^2+e^x\cdot\sin y)=2y+e^x\cdot\cos y$

$\frac{\partial}{\partial x}(2xy+e^x\cdot\cos y)=2y+e^x\cdot\cos y$ 　より これは完全．よって公式3より．

$u(x,y)=\int y^2+e^x\cdot\sin y\,dx+\int 2xy+e^x\cdot\cos y\,dy-\iint 2y+e^x\cdot\cos x\,dx\,dy$

$=xy^2+e^x\sin y=C$ 　が解である．

$\boxed{2}$ (1) $\frac{\partial}{\partial y}e^x\cdot\sin y=e^x\cdot\cos y$, $\frac{\partial}{\partial x}e^x\cdot\cos y=e^x\cdot\cos y$

より．e^x は積分因子になる．∴公式3より．

$u(x,y)=\int e^x\cdot\sin y\,dx+\int e^x\cdot\cos y\cdot dy-\iint e^x\cdot\cos y\cdot dx\,dy$

$=e^x\cdot\sin y=C$ 　が解である．

(2). $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{(x+y)^2}-x\right)=\frac{(x+y)^2-2(x+y)y}{(x+y)^4}=\frac{x-y}{(x+y)^3}$.

$\frac{\partial}{\partial x}\frac{-x}{(x+y)^2}=\frac{-(x+y)^2+2(x+y)\cdot x}{(x+y)^4}=\frac{x-y}{(x+y)^3}$

より．$\frac{1}{(x+y)^2}$ は積分因子になる　∴公式3より

$u(x,y)=\int\frac{y}{(x+y)^2}-x\cdot dx+\int\frac{-x}{(x+y)^2}\cdot dy-\iint\frac{x-y}{(x+y)^3}dx\cdot dy$

$=\frac{-y}{x+y}-\frac{1}{2}x^2=C$ 　が解である．

これをきれいにすると．

$\frac{x-y}{x+y}-x^2=C$ 　$(2C+1\rightarrow C)$ 　となる．

$\boxed{3}$ (1) $\dfrac{\partial}{\partial y} 3\cdot x^m\cdot y^{n+2} = 3\cdot(n+2)\cdot x^m\cdot y^{n+1}$

$\dfrac{\partial}{\partial x} 4x^{m+1}\cdot y^{n+1} = 4\cdot(m+1)\cdot x^m\cdot y^{n+1}$ より

$m=2$, $n=2$ とすれば 積分因子となる. ∴公式3より

$u(x,y) = \int 3x^2\cdot y^4\,dx + \int 4x^3\cdot y^3 dy - \iint 4\cdot 3\cdot x^2\cdot y^3\,dx\,dy$

$= x^3\cdot y^4 = C$ が解である

(2) $\dfrac{\partial}{\partial y} x^m\cdot y^{n+1}\cos x = (n+1)\cdot x^m\cdot y^n\cdot\cos x$

$\dfrac{\partial}{\partial x} 2\cdot x^m\cdot y^n\cdot\sin x = 2\cdot m\cdot x^{m-1}\,y^n\cdot\sin x + 2x^m\cdot y^n\cdot\cos x$ より

$m=0$, $n=1$ とすれば積分因子になる ∴公式3より

$u(x,y) = \int y^2\cdot\cos x\cdot dx + \int 2y\cdot\sin x\cdot dy - \iint 2\cdot y\cos x\cdot dx\,dy$

$= y^2\cdot\sin x = C$ が解である.