演習問題

1 ラプラス逆変換を求めよ.

(1) $\dfrac{2s+7}{s^2+5s+6}$　　(2) $\dfrac{13}{(s+3)(s^2+4)}$

2 次の微分方程式を解け

(1) $x'(t)-3x(t)=e^{2t}$, $x(0)=2$.

(2) $x''(t)+4x'(t)+4x(t)=0$, $x(0)=1$, $x'(0)=-3$.

(3) $x''(t)-3x'(t)+2x(t)=1$, $x(0)=x'(0)=0$

3 ラプラス逆変換を合成法則を用いて求めよ. ($\lambda \neq 0$)

(1) $\dfrac{1}{s^2(s+\lambda)}$　　(2) $\dfrac{1}{s(s^2+\lambda^2)}$

解答

1 (1) $\dfrac{2s+7}{s^2+5s+6}=\dfrac{2s+7}{(s+2)(s+3)}=\dfrac{A}{s+2}+\dfrac{B}{s+3}$ とおくと．

$\dfrac{A}{s+2}+\dfrac{B}{s+3}=\dfrac{(A+B)s+3A+2B}{s^2+5s+6}$ より

$\begin{cases}A+B=2\\3A+2B=7\end{cases}$ となる．これを解けば $\begin{cases}A=3\\B=-1\end{cases}$ となる．これより

$L^{-1}\left(\dfrac{2s+7}{s^2+5s+6}\right)=3\cdot L^{-1}\left(\dfrac{1}{s+2}\right)-L^{-1}\left(\dfrac{1}{s+3}\right)=3\cdot e^{-2t}-e^{-3t}$ である

(2). $\dfrac{13}{(s+3)(s^2+4)}=\dfrac{A}{s+3}+\dfrac{B\cdot s+C}{s^2+4}$ とおくと．

右辺 $=\dfrac{(A+B)s^2+(3B+C)s+4A+3C}{(s+3)(s^2+4)}$ より

$\begin{cases}A+B=0\\3B+C=0\\4A+3C=13\end{cases}$ となる．これを解けば $\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=3\end{cases}$ である．これより

$L^{-1}\left(\dfrac{13}{(s+3)(s^2+4)}\right)=L^{-1}\left(\dfrac{1}{s+3}+\dfrac{-s+3}{s^2+4}\right)$

$=L^{-1}\left(\dfrac{1}{s+3}\right)-L^{-1}\left(\dfrac{s}{s^2+4}\right)+\dfrac{3}{2}\cdot L^{-1}\left(\dfrac{2}{s^2+4}\right)$

$=e^{-3t}-\cos 2t+\dfrac{3}{2}\sin 2t$ である．

② (1) 両辺をラプラス変換すると.

$$L(x'(t))-3L(x(t))=L(e^{2t})$$

$$sX(s)-2-3X(s)=\frac{1}{s-2}$$

$$(s-3)X(s)=\frac{1}{s-2}+2=\frac{2s-3}{s-2}$$

$$X(s)=\frac{2s-3}{(s-2)(s-3)}$$ となる. ここで.

$$\frac{2s-3}{(s-2)(s-3)}=\frac{A}{s-2}+\frac{B}{s-3}$$ とおくと. $\begin{cases} A=-1 \\ B=3 \end{cases}$ をえる. これより.

$$x(t)=L^{-1}(X(s))=L^{-1}\left(\frac{2s-3}{(s-2)(s-3)}\right)=-L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right)+3L^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right)$$

$$=-e^{2t}+3e^{3t}$$ である

(2) $$L(x''(t))+4L(x'(t))+4L(x(t))=0$$

$$s^2X(s)-s+3+4sX(s)-4+4X(s)=0$$

$$(s^2+4s+4)X(s)=s+1$$

$$X(s)=\frac{s+1}{s^2+4s+4}=\frac{1}{s+2}-\frac{1}{(s+2)^2}$$ より

$$x(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right)-L^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)^2}\right)=e^{-2t}-t\cdot e^{-2t}$$ である.

(3) $$L(x''(t))-3L(x'(t))+2L(x(t))=L(1)$$

$$s^2X(s)-3sX(s)+2X(s)=\frac{1}{s}$$

$$X(s)=\frac{1}{s(s^2-3s+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{s-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-2}$$ より

$$x(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}\right)-L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)+L^{-1}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-2}\right)=\frac{1}{2}-e^{t}+\frac{1}{2}e^{2t}$$ である

$\boxed{3}$ (1) $L^{-1}\left(\frac{1}{s^2(s+\lambda)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s^2}\right) * L^{-1}\left(\frac{1}{s+\lambda}\right) = t * e^{-\lambda t}$

$= \int_0^t s \cdot e^{-\lambda(t-s)} \cdot ds = \left[\frac{1}{\lambda} s \cdot e^{-\lambda(t-s)}\right]_0^t - \int_0^t \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(t-s)} \cdot ds$

$= \frac{1}{\lambda} t - \left[\frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda(t-s)}\right]_0^t = \frac{1}{\lambda} t - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} e^{-\lambda t}$ である

(2) $L^{-1}\left(\frac{1}{s(s^2+\lambda^2)}\right) = L^{-1}\left(\frac{1}{s}\right) * L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+\lambda^2}\right)$

$= 1 * \frac{1}{\lambda} \sin \lambda t = \int_0^t \frac{1}{\lambda} \sin \lambda s \, ds$

$= \left[-\frac{1}{\lambda^2} \cos \lambda s\right]_0^t = -\frac{1}{\lambda^2}(\cos \lambda t - 1)$ である