

応用数学 練習問題

1. 次の微分方程式を解きなさい .

$$(1) y' = -\frac{x}{y}$$

$$(2) y' \sin x = y \cos x, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$(3) y^3 + x^6 y' = 0$$

$$(4) xy' = x + y$$

$$(5) xy' + 2y = 3x, y(1) = 1$$

$$(6) (3x + 2y + 1)dx + (2x - y - 4)dy = 0$$

$$(7) (\cos x + 2xy)dx + x^2 dy = 0$$

$$(8) y' + y = x, y(0) = 0$$

$$(9) xy' + y = \sin x$$

$$(10) xy' + 4y = x^{-4}$$

2. かつこ内の変数変換を用いて , 次の微分方程式の一般解を求めよ .

$$(1) xy' = e^{-xy} - y \quad (v = xy) \quad (2) y' = (x + e^y - 1)e^{-y} \quad (u = x + e^y)$$

3. 次の微分方程式を解け .

$$(1) y' = \frac{x - y - 1}{x - 2y - 1} \quad (2) y' = \frac{6x - 2y - 3}{2x + 2y - 1}$$

4. 次の全微分方程式について , 与えられた関数が積分因子であることを示し , 一般解を求めよ .

$$(1) \sin y dx + \cos y dy = 0 \quad (e^x) \quad (2) (2xy^2 - y)dx + xdy = 0 \quad (y^{-2})$$

5. 次のベルヌーイの微分方程式を解け .

$$(1) y' + xy = \frac{x}{y} \quad (2) y' + \frac{y}{x} = x^2 y^3$$

6. 微分方程式 $y' + (2x + 1)y - y^2 = 1 + x + x^2$ を次の順序でとけ . ただし , $y = x$ が解であることを利用せよ .

(a) $z = y - x$ とおき , 変数変換を行い , ベルヌーイの微分方程式を導け .

(b) (a) で得られた微分方程式に , $w = \frac{1}{z}$ で変数変換を行い , 1 階線形微分方程式を導け .

(c) (b) で得られた微分方程式を解け .

(d) 一般解を求めよ .

7. $f(x, y) = xy$ が $D = \{(x, y) \mid 0 \leq |x| \leq a, 0 \leq |y| \leq b\}$ 上でリプシツ条件を満たすことを示せ .

8. 次の関数のラプラス変換を求めよ．ただし，ラプラス変換表を用いてはいけない．

$$(1) f(t) = 1 \qquad (2) f(t) = e^{\lambda t}$$
$$(3) f(t) = U(t - \lambda) \ (\lambda > 0) \qquad (4) f(t) = t^n \ (\text{nは自然数})$$

9. 次の関数のラプラス変換を求めよ．ただし，ラプラス変換表を用いてよい．

$$(1) f(t) = at^2 + bt + c \qquad (2) f(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda t}} \ (\lambda > 0)$$
$$(3) f(t) = U(t - \lambda) \ (\lambda > 0) \qquad (4) f(t) = t^n \ (\text{nは自然数})$$
$$(5) f(t) = e^{\mu t} t^n \qquad (6) f(t) = e^{\mu t} \sin \lambda t$$
$$(7) f(t) = t \sin \lambda t \qquad (8) f(t) = t * e^t$$

10. 次の関数の $f(t + \lambda)$ と $f(t - \lambda)$ のラプラス変換を求めよ．ただし，ラプラス変換表を用いてよい．

$$(1) f(t) = t \qquad (2) f(t) = e^t$$

11. 次の関数のラプラス逆変換を求めよ．ただし，ラプラス変換表を用いてよい．

$$(1) F(s) = \frac{1}{2s - 1} \qquad (2) F(s) = \frac{se^{-3s}}{s^2 + \lambda^2}$$
$$(3) F(s) = \frac{1}{(s - \lambda)^2} \qquad (4) F(s) = \frac{2\lambda + 7}{s^2 + 5s + 6}$$
$$(5) F(s) = \frac{5}{(s + 2)(s^2 + 1)} \qquad (6) F(s) = \frac{1}{(s^2 + 1)^2}$$

12. 次の初期値問題を解け．

$$(1) x'(t) - 3x(t) = e^{2t}, \ x(0) = 2$$
$$(2) x''(t) - 6x'(t) + 9x(t) = 0, \ x(0) = 1, \ x'(0) = -1$$
$$(3) x''(t) + 4x'(t) + 4x(t) = 0, \ x(0) = 1, \ x'(0) = -3$$
$$(4) x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = 1, \ x(0) = x'(0) = 0$$

13. 次の境界値問題を解け．

$$(1) x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 0, \ x(0) = 0, \ x\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$
$$(2) x''(t) + 3x'(t) - 4x(t) = 0, \ x(0) = 0, \ x(1) = 1$$
$$(3) x''(t) - x'(t) - 2x(t) = 3e^{2t}, \ x(0) = 0, \ x(1) = e^2$$

14. 次の連立微分方程式を解け．

$$(1) \begin{cases} x'(t) - 2y(t) = 0 & x(0) = 5 \\ y'(t) - 2x(t) = 0 & y(0) = 1 \end{cases}$$
$$(2) \begin{cases} x'(t) + 3x(t) + y(t) = 0 & x(0) = 0 \\ -10x(t) + y'(t) - 3y(t) = 2e^t & y(0) = 0 \end{cases}$$

15. 熱伝導方程式を次の条件のもとで解け．

$$y(0, t) = 0, \quad y(\pi, t) = 0, \quad y(x, 0) = \sin x$$