-1-

No.

解答

1 (1) 公式より

$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

$$x^2 + y^2 = 2C$$

$x^2 + y^2 = C \qquad (2C \to C)$ である

(2) $y' = \dfrac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\frac{y}{x}}$ より $v = \frac{y}{x}$ とおくと公式より

$v' = \frac{1}{x}\left(\frac{v^2-1}{2v} - v\right)$ であるこれより

$$\int \frac{2v}{v^2+1}\,dv = \int -\frac{1}{x}\,dx$$

$$\log(v^2+1) = -\log x + C$$

$$v^2 + 1 = e^C \cdot x^{-1}$$

$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = C \cdot x^{-1} \qquad (e^C \to C)$

$x^2 + y^2 = Cx$ である. ここで $y(1) = 3$ より $C = 10$.

$\therefore x^2 + y^2 = 10x$ となる.

(3). $\frac{\partial}{\partial y}(2x + e^y) = e^y$, $\frac{\partial}{\partial x} xe^y = e^y$ よりこれは完全. ∴公式から

$$u(x,y) = \int 2x + e^y\,dx + \int xe^y\,dy - \iint e^y\,dx\,dy$$

$= x^2 + xe^y = C$ となる.

No.

(4) $y' + \frac{4}{x}y = x^{-5}$ より 公式を使うと.

$$y = e^{-\int \frac{4}{x}dx} \left(\int x^{-5} \cdot e^{\int \frac{4}{x}dx} dx + C \right.$$

$$= e^{-4\log x} \left(\int x^{-5} \cdot e^{4\log x} dx + C \right)$$

$$= x^{-4} \left(\int x^{-1} dx + C \right) = x^{-4} (\log x + C)$$ となる.

2. $v' = y + xy'$ より 与式は

$v' = e^{-v}$ となる. これより

$\int e^{v} dv = \int 1\, dx$ となり

$e^{v} = x + C$.

$e^{xy} = x + C$ である

3. ラプラス変換すると.

$s^2 X(s) - 4s X(s) - 12 X(s) = \frac{1}{s}$ より

$$X(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{s^2 - 4s - 12} = \frac{1}{s(s-6)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-6}$$ として

A, B, C を求めると.

$$\begin{cases} A + B + C = 0 \\ -4A - 6B + 2C = 0 \\ -12A = 1 \end{cases}$$ より $A = -\frac{1}{12}$, $B = \frac{1}{16}$, $C = \frac{1}{48}$ となり.

$$X(s) = -\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{s+2} + \frac{1}{48} \frac{1}{s-6}$$ であるので

$$x(t) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{16} e^{-2t} + \frac{1}{48} e^{6t}$$ である.

No.

4. $x'(0)=C$ としてラプラス変換すると.

$$s^2X(s)-C+3sX(s)-4X(s)=0$$ より

$$X(s)=\frac{C}{s^2+3s-4}=\frac{C}{(s+4)(s-1)}=\frac{C}{5}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+4}\right)$$ となり

$$x(t)=\frac{C}{5}\left(e^{t}-e^{-4t}\right)$$ である. $x(1)=1$ より

$$C=\frac{5}{e-e^{-4}}$$ であるので. $$x(t)=\frac{e^{t}-e^{-4t}}{e-e^{-4}}$$ となる.

5.(1) t でラプラス変換すると.

$$\frac{\partial}{\partial x}Y(x,s)=sY(x,s)-e^{x}$$

$$Y(0,s)=\frac{1}{s-1}$$ である

(2) x でラプラス変換すると.

$$\xi\cdot Y^{*}(\xi,s)-\frac{1}{s-1}=s\cdot Y^{*}(\xi,s)-\frac{1}{\xi-1}$$ である.

(3) $$Y^{*}(\xi,s)=\frac{1}{\xi-s}\cdot\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{\xi-1}\right)=\frac{1}{(s-1)(\xi-1)}$$ より

$$Y(x,s)=e^{x}\cdot\frac{1}{s-1}$$

$$y(x,t)=e^{x}\cdot e^{t}=e^{x+t}$$ である.