## ラプラス変換の基本法則

### 1. 線形法則

$$L(af(t)+bg(t)) = a\cdot L(f(t)) + bL(g(t))$$

∵ $L(af(t)+bg(t)) = \int_0^\infty e^{-st}(af(t)+bg(t))$

$= a\cdot\int_0^\infty e^{-st}\cdot f(t)\cdot dt + b\cdot\int_0^\infty e^{-st}\cdot g(t)\cdot dt$

$= a\cdot L(f(t)) + b\cdot L(g(t))$

### 2. 相似法則

$$L(f(\lambda t)) = \frac{1}{\lambda}\cdot F\left(\frac{s}{\lambda}\right) \qquad (\lambda > 0)$$

∵ $L(f(\lambda t)) = \int_0^\infty e^{-st}\cdot f(\lambda t)\cdot dt$.

ここで，$\tau = \lambda t$ とすると．$t = \frac{1}{\lambda}\cdot\tau$，$dt = \frac{1}{\lambda}\cdot d\tau$ より

$L(f(\lambda t)) = \int_0^\infty e^{-s\cdot\frac{\tau}{\lambda}}\cdot f(\tau)\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot d\tau$

$= \frac{1}{\lambda}\cdot\int_0^\infty e^{-\frac{s}{\lambda}\cdot\tau} f(\tau)\cdot d\tau$

$= \frac{1}{\lambda}\cdot F\left(\frac{s}{\lambda}\right)$

**問題** 次の関数のラプラス変換を求めよ．

(1) $at^2+bt+c$　(2) $\frac{1}{\sqrt{\lambda t}}$ $(\lambda>0)$　(3) $(2t)^\lambda$ $(\lambda>-1)$

**答** (1) $L(t^n) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ より

$L(at^2+bt+c) = a\cdot L(t^2) + b\cdot L(t) + c\cdot L(1)$

$= \frac{2a}{s^3} + \frac{b}{s^2} + \frac{c}{s}$

(2) $L\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}}$ より.

$$L\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda t}}\right)=\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{s}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{s}{\lambda}}}=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda s}}$$

(3) $L(t^{\lambda})=\frac{\Gamma(\lambda+1)}{s^{\lambda+1}}$ より

$$L((2t)^{\lambda})=2^{\lambda}\cdot L(t^{\lambda})=\frac{2^{\lambda}\cdot\Gamma(\lambda+1)}{s^{\lambda+1}}$$ である.

$f(t)$ を $\lambda$ $(\lambda>0)$ だけ平行移動させ. $0\leqq t<\lambda$ で $0$ であるグラフは.
$U(t-\lambda)\cdot f(t-\lambda)$ と表せる. これを $f(t-\lambda)$ とかく.
また. $f(t)$ を $-\lambda$ だけ平行移動させ. $t<0$ で $0$ であるグラフは.
$U(t)\cdot f(t+\lambda)$ と表せる. これを $f(t+\lambda)$ とかく.

## 3. 第1移動法則.

$$L(f(t-\lambda))=e^{-\lambda s}\cdot F(s) \qquad (\lambda>0)$$

∵ $L(f(t-\lambda))=\int_0^{\infty}e^{-st}\cdot f(t-\lambda)\cdot dt$.

ここで $t-\lambda=\tau$ とすれば. $t=\tau+\lambda$, $dt=d\tau$ より

$$L(f(t-\lambda))=\int_{-\lambda}^{\infty}e^{-s(\tau+\lambda)}\cdot f(\tau)\cdot d\tau$$
$$=e^{-s\lambda}\cdot\int_0^{\infty}e^{-s\tau}f(\tau)\cdot d\tau$$
$$=e^{-s\lambda}\cdot F(s).$$

## 4. 第2移動法則.

$$L(f(t+\lambda))=e^{\lambda s}\left(F(s)-\int_0^{\lambda}e^{-st}\cdot f(t)\cdot dt\right) \qquad (\lambda>0)$$

☺ $L(f(t+\lambda)) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t+\lambda) \cdot dt$

ここで、$t+\lambda = \tau$ とすれば、 $t = \tau - \lambda$ , $dt = d\tau$ より

$$L(f(t+\lambda)) = \int_\lambda^\infty e^{-s(\tau-\lambda)} f(\tau) \cdot d\tau$$
$$= e^{\lambda s} \cdot \int_\lambda^\infty e^{-s\tau} \cdot f(\tau) \cdot d\tau$$
$$= e^{\lambda s} \left( \int_0^\infty e^{-s\tau} f(\tau) \cdot d\tau - \int_0^\lambda e^{-s\tau} f(\tau) \cdot d\tau \right)$$
$$= e^{\lambda s} \cdot \left( F(s) - \int_0^\lambda e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt \right)$$

問題. 次の関数の $f(t-\lambda)$ と $f(t+\lambda)$ のラプラス変換を求めよ.

(1) $f(t) = t$ (2) $f(t) = e^t$.

答 (1) $L(t) = \frac{1}{s^2}$ より

$$L(f(t-\lambda)) = e^{-\lambda s} \cdot \frac{1}{s^2}$$
$$L(f(t+\lambda)) = e^{\lambda s} \cdot \left( \frac{1}{s^2} - \int_0^\lambda e^{-st} \cdot t \cdot dt \right)$$
$$= \frac{1}{s^2} e^{\lambda s} - e^{\lambda s} \cdot \left( \left[ -\frac{1}{s} e^{-st} \cdot t \right]_0^\lambda + \frac{1}{s} \int_0^\lambda e^{-st} \cdot dt \right)$$
$$= \frac{1}{s^2} e^{\lambda s} - e^{\lambda s} \left( -\frac{1}{s} e^{-\lambda s} \lambda - \frac{1}{s^2} \left[ e^{-st} \right]_0^\lambda \right.$$
$$= \frac{1}{s^2} e^{\lambda s} + \frac{\lambda}{s} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2} e^{\lambda s} = \frac{1}{s^2} + \frac{\lambda}{s}$$

(2). $L(e^t) = \frac{1}{s-1}$ より.

$$L(f(t-\lambda)) = e^{-\lambda s} \cdot \frac{1}{s-1}$$
$$L(f(t+\lambda)) = e^{\lambda s} \left( \frac{1}{s-1} - \int_0^\lambda e^{-st} \cdot e^t \cdot dt \right)$$
$$= e^{\lambda s} \left( \frac{1}{s-1} - \frac{1}{1-s} \left[ e^{(1-s)t} \right]_0^\lambda \right)$$
$$= e^{\lambda s} \cdot \left( \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s-1} e^{(1-s)\lambda} - \frac{1}{s-1} \right) = \frac{1}{s-1} \cdot e^\lambda$$

5. 像の移動法則.

$$L(e^{\mu t}\cdot f(t)) = F(s-\mu)$$

$\because$ $L(e^{\mu t}\cdot f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{\mu t}\cdot f(t)\,dt$

$= \int_0^\infty e^{-(s-\mu)t}\cdot f(t)\,dt$

$= F(s-\mu)$

問題. (1) $L(e^{\mu t}\cdot t^n)$ を求めよ

(2) $L(e^{\mu t}\cdot \sin\lambda t)$ を求めよ.

答. (1). $L(t^n) = \dfrac{n!}{s^{n+1}}$ より

$$L(e^{\mu t}\cdot t^n) = \frac{n!}{(s-\mu)^{n+1}}$$

(2) $L(\sin\lambda t) = \dfrac{\lambda}{s^2+\lambda^2}$ より

$L(e^{\mu t}\cdot \sin\lambda t) = \dfrac{\lambda}{(s-\mu)^2+\lambda^2}$ である.

注意. ラプラス変換を行うときの $s$ は定義域を決めていないが、

前回の定理から. "十分大きい正の数" としてよい.