## 5 リッカティの微分方程式

特殊解がわかっている場合

$y' + P(x)y = Q(x)$ の一般解は

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left( \int Q(x) \cdot e^{\int P(x) \cdot dx} \cdot dx + c \right)$$

$$= c \cdot \varphi(x) + \psi(x)$$ であった。

ここで $\psi(x) = e^{-\int P(x) \cdot dx} \cdot \int Q(x) \cdot e^{\int P(x) \cdot dx} dx$ なので

$\psi(x)$ を求めるためには積分が2回必要。

しかし、もし $y_1$ が特殊解であるとわかっている場合、

$z = y - y_1$ として変数変換すると、 $z' = y' - y_1'$ より

$$z' + y_1' + P(x)(z + y_1) = Q(x)$$

$$z' + P(x)z = 0$$ となり、変数分離形になる。

$\longrightarrow$ 積分は1回ですむ。

さらに $y_2$ も特殊解であるとき、

$y_1 = a_1 \cdot \varphi + \psi$ , $y_2 = a_2 \cdot \varphi + \psi$ より

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{(c - a_1)\varphi}{(a_2 - a_1)\varphi} = \frac{c - a_1}{a_2 - a_1} = c \quad \left( \frac{c - a_1}{a_2 - a_1} \to c \right)$$ となり

$$y = c \cdot (y_2 - y_1) + y_1$$ となる

$\longrightarrow$ 積分は0回

$\longrightarrow$ 特殊解がわかると計算が簡単になる。

## リッカティの微分方程式

☆… $y' + P(x) + Q(x)\cdot y + R(x)y^2 = 0$

の形の微分方程式をリッカティの微分方程式という.

Case 1　特殊解 $y_1$ が知られている場合.

$z = y - y_1$ とおいて ☆ を変数変換すると. $z' = y' - y_1'$ より

$(z' + y_1') + P(x) + Q(x)(z + y_1) + R(x)(z + y_1)^2 = 0$

$z' + (Q(x) + 2R(x)y_1)\cdot z + R(x)\cdot z^2 = 0$ となり

ベルヌーイの微分方程式になる.

例題. $y' - 3xy + xy^2 = -2x$ を解け

ただし. $y = 1$ が特殊解であることを利用せよ.

答. $z = y - 1$ とおいて変数変換すると. $z' = y'$ より

$z' - 3x(z+1) + x(z+1)^2 = -2x$

$z' - xz = -xz^2$ となる.

ここで $w = \frac{1}{z}$ とおき、変数変換すると. $z = w^{-1}$, $z' = -w'\cdot w^{-2}$ より

$-w'\cdot w^{-2} - x\cdot w^{-1} = -xw^{-2}$

$w' + xw = x$ となる ∴ 公式4より

$w = e^{-\int x dx}\cdot\left(\int x\cdot e^{\int x dx}dx + c\right)$

$= e^{-\frac{1}{2}x^2}\left(e^{\frac{1}{2}x^2} + c\right)$

$= c\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + 1$ となる.

$$\therefore\ z = \frac{1}{c\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2} + 1}$$

$$y = \frac{1}{c\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}+1} + 1$$ である.

問題 ① $y' + (2x+1)y - y^2 = 1 + x + x^2$ の特殊解 $y = x$ が与えられている.

(1) $z = y - x$ とおき, ベルヌーイの微分方程式を導け.

(2) $w = \frac{1}{z}$ とおき, 1階線形微分方程式を導け

(3) (2)を解け

(4) 一般解を求めよ.

② $xy' = x^4 + 2y - y^2$ を解け. ただし. $y = -x^2$ が特殊解である.

答 ①(1) $z' = y' - 1$ より

$$z' + 1 + (2x+1)(z+x) - (z+x)^2 = 1 + x + x^2$$

$$z' + z = z^2$$ となる

(2). $z = w^{-1}$, $z' = -w'\cdot w^{-2}$ より

$$-w'\cdot w^{-2} + w^{-1} = w^{-2}$$

$$w' - w = -1$$ となる

(3) 公式4より

$$w = e^{\int -1dx}\cdot\left(\int - e^{\int -1dx}dx + c\right)$$

$$= e^{x}(e^{-x} + c)$$

$$= 1 + c\cdot e^{x}$$ である

(4) $z = \dfrac{1}{1+c\cdot e^{x}}$ , $y = \dfrac{1}{1+c\cdot e^{x}} + x$ である

② $z = y + x^2$ とおくと. $z' = y' + 2x$ より

$$x(z'-2x) = x^4 + 2(z-x^2) - (z-x^2)^2$$

$$xz' = 2z(1+x^2) - z^2 \quad \text{となる.}$$

ここで $w = z^{-1}$ とすると $z = w^{-1}$, $z' = -w'\cdot w^{-2}$ より

$$-x\cdot w'\cdot w^{-2} = 2\cdot w^{-1}(1+x^2) - w^{-2}$$

$$w' + \frac{2(1+x^2)}{x} w = \frac{1}{x} \quad \text{となる.} \quad \therefore \text{公式4より}$$

$$w = e^{-\int \frac{2(1+x^2)}{x}dx}\cdot\left(\int \frac{1}{x}\cdot e^{\int \frac{2(1+x^2)}{x}dx} + c\right)$$

$$= e^{-2\log x - x^2}\cdot\left(\int x\cdot e^{x^2} + c\right)$$

$$= x^{-2}\cdot e^{-x^2}\cdot\left(\frac{1}{2}e^{x^2} + c\right)$$

$$= x^{-2}\cdot\left(\frac{1}{2} + c\cdot e^{-x^2}\right) \quad \text{となる}$$

$$\therefore z = x^2\cdot\frac{2}{1+2c\cdot e^{-x^2}} = x^2\cdot\frac{2}{1+c\cdot e^{-x^2}} \quad (2c \to c)$$

$$\therefore (y+x^2)\cdot(e^{x^2}+c) = 2\cdot x^2\cdot e^{x^2} \quad \text{となる}$$

Case 2. 特殊解が 2つ あるいは 3つわかると.

より計算が簡単になる.

## 6 その他の1階微分方程式

### 因数分解できる場合

n個の微分方程式

$F_1(x,y,y')=0$, $F_2(x,y,y')=0$, …, $F_n(x,y,y')=0$ がそれぞれ一般解

$\varphi_1(x,y,C)=0$, $\varphi_2(x,y,C)=0$, …, $\varphi_n(x,y,C)=0$ をもつとき、

$F_1(x,y,y')\cdot \cdots \cdot F_n(x,y,y')=0$ の解は

$\varphi_1(x,y,C)\cdot \cdots \cdot \varphi_n(x,y,C)=0$ である

∵ どれかの $i$ で $\varphi_i(x,y,C)=0$ になるので、
$F_i(x,y,y')=0$ になる //.

注意. 各 $\varphi_i(x,y,C)=0$ も一般解だが、上の形はより一般的な解.

例題. $(y')^2+5yy'+6y^2=0$ を解け

答. $(y'+2y)(y'+3y)=0$ とできるので、それぞれ解くと.

$y'+2y=0$ より $y=c\cdot e^{-2x}$

$y'+3y=0$ より $y=c\cdot e^{-3x}$ となる

∴ $(y-c\cdot e^{-2x})(y-c\cdot e^{-3x})=0$ が一般解である

問題 次を解け

(1) $(y')^2-y\cdot y'-12y^2=0$

(2) $x^2\cdot(y')+3xy\cdot y'+2y^2=0$

答 (1) $(y'-4y)(y'+3y)=0$ となるので それぞれ解くと．

$y'-4y=0$ より $y=c\cdot e^{4x}$

$y'+3y=0$ より $y=c\cdot e^{-3x}$ である．

$\therefore (y-c\cdot e^{4x})\cdot(y-c\cdot e^{-3x})=0$ となる

(2) $(xy'+y)(xy'+2y)=0$ より それぞれを解くと．

$xy'+y=0$ より $xy=c$

$xy'+2y=0$ より $x^2y=c$ となる

$\therefore (xy-c)(x^2y-c)=0$ となる