4 1階線形微分方程式

$P(x), Q(x)$ を x の関数として.

☆… $\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x)$

の形の微分方程式を線形であるという.

定理. ☆の一般解は

$$y = e^{-\int P(x)dx} \cdot \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot dx + C \right)$$ である

∵ まず解が存在すると仮定して, その解を y とし,

$$z = e^{\int P(x) \cdot dx} \cdot y$$ とおく.

これを x で微分すると.

$$\frac{dz}{dx} = P(x) \cdot e^{\int P(x) \cdot dx} \cdot y + e^{\int P(x) \cdot dx} \cdot \frac{dy}{dx}$$

$$= e^{\int P(x) \cdot dx} \left(\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y \right) = e^{\int P(x) \cdot dx} \cdot Q(x)$$ となる

☆より

これを x で積分すると.

$$z = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x) \cdot dx} \cdot dx + C$$ であり.

$$y = e^{-\int P(x) \cdot dx} \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x) \cdot dx} \cdot dx + C \right)$$ となる

逆に. y を微分すると.

$$\frac{dy}{dx} = -P(x) \cdot e^{-\int P(x) \cdot dx} \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x) \cdot dx} \cdot dx + C \right)$$

$$+ e^{-\int P(x) \cdot dx} \cdot Q(x) \cdot e^{\int P(x) \cdot dx}$$

つづく.

$$= -P(x)\cdot e^{-\int P(x)\cdot dx}\cdot\left(\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)dx}\cdot dx + c\right) + Q(x)$$

$$= -P(x)\cdot y + Q(x)$$ となり、この y が解であることがわかる。 //

公式4. 1階線形微分方程式 ☆ の解は、

$$y = e^{-\int P(x)\cdot dx}\cdot\left(\int Q(x)\cdot e^{\int P(x)\cdot dx}\cdot dx + c\right)$$ である。

例題. 次の微分方程式を解け.

$$y' = x(1-y)$$

答. $y' + xy = x$ より 公式4を使うと、

$$y = e^{-\int x\cdot dx}\cdot\left(\int x\cdot e^{\int x\cdot dx}\cdot dx + c\right)$$

$$= e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot\left(e^{\frac{1}{2}x^2} + c\right) = 1 + c\cdot e^{-\frac{1}{2}x^2}$$ となる。

問題. 次を解け

(1) $y' + y = 2$ (2) $xy' + y = \sin x$

(3) $y' + y = x$.

答 (1). 公式4 より

$$y = e^{-\int 1dx}\cdot\left(\int 2\cdot e^{\int 1dx}\cdot dx + c\right)$$

$$= e^{-x}\cdot\left(\int 2\cdot e^{x}\cdot dx + c\right)$$

$$= e^{-x}\cdot\left(2\cdot e^{x} + c\right)$$

$$= 2 + c\cdot e^{-x}$$ である。

(2) $y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x} \sin x$ より 公式4を使うと.

$$y' = e^{-\int \frac{1}{x} dx} \cdot \left(\int \frac{1}{x} \sin x \cdot e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right)$$

$$= e^{-\log x} \cdot \left(\int \frac{1}{x} \sin x \cdot e^{\log x} dx + C \right)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot \left(\int \frac{1}{x} \sin x \cdot x \; dx + C \right)$$

$$= \frac{C}{x} - \frac{1}{x} \cdot \cos x$$ となる

(3) 公式4より

$$y = e^{-\int 1 dx} \cdot \left(\int x \cdot e^{\int 1 dx} \cdot dx + c \right)$$

$$= e^{-x} \cdot \left(\int x \cdot e^{x} dx + c \right)$$

$$= e^{-x} \cdot \left(x \cdot e^{x} - \int e^{x} dx + c \right)$$

$$= x - 1 + c \cdot e^{-x}$$ である

ベルヌーイの微分方程式.

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^{a} \quad (a \neq 0, 1)$$

をベルヌーイの微分方程式という.

これは非線形だが, $z = y^{1-a}$ とおくと線形になる.

∵ まず $y = z^{\frac{1}{1-a}}$ に注意する. これより

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{1}{1-a} \cdot z^{\frac{1}{1-a} - 1} = \frac{dz}{dx} \cdot \frac{1}{1-a} \cdot z^{\frac{a}{1-a}}$$ となる.

これらを代入すると.

$$\frac{dz}{dx}\cdot\frac{1}{1-a}\cdot z^{\frac{a}{1-a}}+P(x)\cdot z^{\frac{1}{1-a}}=Q(x)\cdot z^{\frac{a}{1-a}}$$ となる.

$$\frac{dz}{dx}\cdot\frac{1}{1-a}+P(x)\cdot z=Q(x)$$

$$\frac{dz}{dx}+(1-a)P(x)\cdot z=(1-a)Q(x)$$ となり 線形である //.

例題. $y'+y=-y^2$ を解け

∵ $z=y^{-1}$ とおくと. $y=z^{-1}$

$\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}\cdot(-1)\cdot z^{-2}$ より 与式は

$z'\cdot(-1)\cdot z^{-2}+z^{-1}=-z^{-2}$

$z'-z=1$ とできる. ∴公式4より.

$$z=e^{-\int(-1)dx}\cdot\left(\int 1\cdot e^{\int -1dx}\cdot dx+c\right)$$
$$=e^{x}\cdot\left(\int e^{-x}dx+c\right)$$
$$=e^{x}\cdot\left(-e^{-x}+c\right)=c\cdot e^{x}-1$$ となる.

$y=z^{-1}$ より $y=\frac{1}{c\cdot e^{x}-1}$ が解である.

問題. 次を解け

(1) $y'+xy=\frac{x}{y}$

(2) $y'+\frac{y}{x}=x^2\cdot y^3$

答 (1). $z = y^2$ とおくと $y = z^{\frac{1}{2}}$ より

$y' = z' \cdot \frac{1}{2} \cdot z^{-\frac{1}{2}}$ である. これより与式は.

$z' \cdot \frac{1}{2} \cdot z^{-\frac{1}{2}} + x \cdot z^{\frac{1}{2}} = x \cdot z^{-\frac{1}{2}}$

$z' + 2xz = 2x$ とできる ∴公式4より

$z = e^{-\int 2x\,dx} \cdot \left(\int 2x \cdot e^{\int 2x \cdot dx} \cdot dx + c \right)$

$= e^{-x^2} \cdot \left(e^{\int 2x\,dx} + c \right) = e^{-x^2} \cdot \left(e^{x^2} + c \right)$

$= 1 + c \cdot e^{-x^2}$ となる. これより

$y^2 = 1 + c \cdot e^{-x^2}$ となる

(2). $z = y^{-2}$ とおくと $y = z^{-\frac{1}{2}}$ より

$y' = z' \cdot -\frac{1}{2} \cdot z^{-\frac{3}{2}}$ となり 与式 は

$z'(-\frac{1}{2}) \cdot z^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{x} \cdot z^{-\frac{1}{2}} = x^2 \cdot z^{-\frac{3}{2}}$

$z' - 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot z = -2 \cdot x^2$ となる ∴公式4より

$z = e^{-\int -\frac{2}{x} dx} \cdot \left(\int -2x^2 e^{\int -\frac{2}{x} dx} \cdot dx + c \right)$

$= e^{\log x^2} \cdot \left(\int -2x^2 e^{\log x^{-2}} dx + c \right)$

$= x^2 \cdot \left(\int -2x^2 \cdot x^{-2} dx + c \right)$

$= x^2 \left(-2x + c \right)$ となる. これより

$y^{-2} = x^2 (-2x + c)$

$x^2 \cdot y^2 (-2x + c) = 1$ となる