② 同次形

$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$ の形の微分方程式を同次形という.

$\longrightarrow$ $u = \frac{y}{x}$ として変数変換すると変数分離形になる.

∵ $y = x \cdot u$ より両辺を x で微分すると

$y' = u + x \cdot u'$ となる. これより与式は

$u + xu' = F(u)$ とでき. さらにまとめると.

$\boxed{\text{公式2}\quad u' = \frac{1}{x}\left(F(u) - u\right)}$ を得る (注:前回の公式は公式1とする)

例 $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$ を解け.

答 $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2\left(\frac{y}{x}\right)}$ よりこれは同次形である.

$F(u) = \frac{u^2 - 1}{2u}$ とおけば公式2より.

$u' = \frac{1}{x}\left(\frac{u^2-1}{2u} - u\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{-u^2-1}{2u}\right) = -\frac{1}{x} \cdot \frac{u^2+1}{2u}$ となる.

よって公式1より

$\int \frac{2u}{u^2+1} du = \int -\frac{1}{x} dx$ となり

$\log(u^2+1) = -\log x + C$

$u^2 + 1 = e^C \cdot \frac{1}{x} = C \cdot \frac{1}{x}$ $(e^C \to C)$

$\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 1 = C \cdot \frac{1}{x}$

$x^2 + y^2 = C \cdot x$ が求める一般解である

問題　次を解け

(1) $xy' = x + y$

(2) $xy' + 2y = 3x$, $y(1) = 1$.

答 (1) $y' = 1 + \frac{y}{x}$ より $F(u) = 1 + u$ とおけば、公式2より

$u' = \frac{1}{x}(1 + u - u) = \frac{1}{x}$ となる。よって公式1より

$\int 1\, du = \int \frac{1}{x} dx$

$u = \log x + C$

$e^u = e^C \cdot x = c \cdot x \quad (e^C \to c)$

$e^{\frac{y}{x}} = c \cdot x$ となる

(2) $y' = -2 \cdot \frac{y}{x} + 3$ より. $F(u) = -2u + 3$ とおけば、公式2より

$u' = \frac{1}{x}(-2u + 3 - u) = -\frac{3}{x}(u - 1)$ となる. よって公式1より

$\int \frac{1}{u-1} du = \int -\frac{3}{x} dx$

$\log(u-1) = -3\log x + C$

$u - 1 = e^C \cdot \frac{1}{x^3} = c \cdot \frac{1}{x^3} \quad (e^C \to c)$

$\frac{y}{x} - 1 = c \cdot \frac{1}{x^3}$

$x^2y - x^3 = c$ となる　ここで $y(1) = 1$ より

$1^2 \cdot 1 - 1^3 = c$ となり　$c = 0$ である

$\therefore$ $x^2y - x^3 = 0$ より $y = x$ が求める解である.

変数変換で同次形になるもの

例. $y' = \dfrac{kx + ly + A}{mx + ny + B}$ を考える.

もし, $A = B = 0$ なら同次形になるので, AとBが0になるような変数変換を考える

Case 1: $kn - lm \neq 0$ のとき. 連立方程式,

$\begin{cases} kx + ly + A = 0 \\ mx + ny + B = 0 \end{cases}$ は唯一の解をもつ. 今それを $\begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases}$ とおく.

変数変換 $X = x - a$, $Y = y - b$ を使うと. 同次形になる.

$y' = \dfrac{dy}{dx}$ を $Y' = \dfrac{dY}{dX}$ でおきかえたいが.

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\frac{dY}{dx}}{\frac{dX}{dx}} = \frac{y'}{1} = y' = \frac{dy}{dx}$$

より $y' = Y'$ である.

これより与式は. $x = X + a$, $y = Y + b$ より

$$Y' = \frac{kX + \underbrace{ka + lb + A}_{0} + lY}{mX + \underbrace{ma + nb + B}_{0} + nY} = \frac{kX + lY}{mX + nY}$$

と同次形になる.

Case2 (参考): $kn - lm = 0$ のとき.

$u = kx + ly + A$ とおいて変数変換を行うと

変数分離形になる

例. $y' = \dfrac{2x-y+1}{x-2y+5}$ を解け.

答. $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ x-2y+5=0 \end{cases}$ を解くと. $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ を得る.

これより $X = x-1$, $Y = y-3$ とおいて変数変換を行うと.

$$Y' = \frac{2X-Y}{X-2Y} = \frac{2-\left(\frac{Y}{X}\right)}{1-2\left(\frac{Y}{X}\right)}$$

とできる. よって $F(u) = \dfrac{2-u}{1-2u}$ とすれば公式2より

$$u' = \frac{1}{X}\left(\frac{2-u}{1-2u} - u\right) = \frac{1}{X}\cdot\frac{2u^2-2u+2}{1-2u} = \frac{-2}{X}\cdot\frac{u^2-u+1}{2u-1}$$

となる よって公式1より

$$\int \frac{2u-1}{u^2-u+1}\,du = \int -\frac{2}{X}\,dX$$

$$\log(u^2-u+1) = -2\log X + c$$

$$u^2-u+1 = e^c\cdot X^{-2} = c\cdot X^{-2} \qquad (e^c \to c)$$

$$\left(\frac{Y}{X}\right)^2 - \frac{Y}{X} + 1 = c\cdot X^{-2}$$

$$Y^2 - XY + X^2 = c$$

$$(y-3)^2 - (x-1)(y-3) + (x-1)^2 = c$$

$$y^2 - 5y + x^2 + x - xy + 7 = c$$

$$y^2 - 5y + x^2 + x - xy = c \qquad (c-7 \to c)$$ となる

問題　次を解け．

(1)　$y' = \dfrac{x-y-1}{x-2y-1}$　　　(2)　$y' = \dfrac{6x-2y-3}{2x+2y-1}$

答 (1)　$\begin{cases} x-y-1=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases}$　を解くと　$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$　である．

$\therefore$ $X = x-1$，$Y = y$ とおくと 与式は

$$Y' = \frac{X-Y}{X-2Y} = \frac{1-\left(\frac{Y}{X}\right)}{1-2\left(\frac{Y}{X}\right)}$$ とできる．

ここで $F(u) = \dfrac{1-u}{1-2u}$ とおくと．公式2より

$$u' = \frac{1}{X}\left(\frac{1-u}{1-2u} - u\right) = \frac{1}{X}\cdot\frac{2u^2-2u+1}{1-2u} = \frac{-1}{X}\cdot\frac{2u^2-2u+1}{2u-1}$$ となる

$\therefore$ 公式1より．

$$\int \frac{2u-1}{2u^2-2u+1}\,du = -\int \frac{1}{X}\,dX$$

$$\frac{1}{2}\log(2u^2-2u+1) = -\log X + C$$

$$2u^2-2u+1 = e^{2C}\cdot X^{-2} = C\cdot X^{-2} \quad (e^{2C} \to C)$$

$$2\cdot\frac{Y^2}{X^2} - 2\frac{Y}{X} + 1 = C\cdot X^{-2}$$

$$2Y^2 - 2XY + X^2 = C$$

$$2y^2 - 2(x-1)y + (x-1)^2 = C$$

$$2y^2 - 2xy + x^2 + 2y - 2x + 1 = C$$

$$2y^2 - 2xy + x^2 + 2y - 2x = C \quad (C-1 \to C)$$ となる

(2) $\begin{cases} 6x-2y-3=0 \\ 2x+2y-1=0 \end{cases}$ を解くと．$\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=0 \end{cases}$ となる．

∴ $X=x-\frac{1}{2}$ ，$Y=y$ とおくと．与式は

$$Y'=\frac{6X-2Y}{2X+2Y}=\frac{3X-Y}{X+Y}=\frac{3-\left(\frac{Y}{X}\right)}{1+\left(\frac{Y}{X}\right)}$$ である．

ここで $F(u)=\frac{3-u}{1+u}$ とおくと公式2より

$$u'=\frac{1}{X}\cdot\left(\frac{3-u}{1+u}-u\right)=\frac{1}{X}\cdot\frac{-u^2-2u+3}{1+u}=\frac{-1}{X}\cdot\frac{u^2+2u-3}{1+u}$$

とできる．∴ 公式1より

$$\int\frac{1+u}{u^2+2u-3}\,du=\int-\frac{1}{X}\,dX$$

$$\frac{1}{2}\log(u^2+2u-3)=-\log X+c$$

$$u^2+2u-3=e^{2c}\cdot X^{-2}=c\cdot X^{-2} \qquad (e^{2c}\to c)$$

$$\left(\frac{Y}{X}\right)^2+2\frac{Y}{X}-3=c\cdot X^{-2}$$

$$Y^2+2XY-3X^2=c$$

$$y^2+2\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot y-3\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=c$$

$$4y^2+8xy-12x^2-4y+6x+3=c$$

$$2y^2+4xy-6x^2-2y+3x=C \qquad \left(\frac{c-3}{2}\to c\right)$$

となる．