§2. 求積法を用いた解法

求積法

積分を数回行うことで、微分方程式の解をみつける方法.

注意.

①計算は形式的に行うため.

(1) 定義域は気にしない. 例 $y = \frac{1}{x}$ ($x \neq 0$) これを書かない

(2) 絶対値は使わない.

②解は定義域が制限されない形が好ましい.

例 $y = \frac{1}{x}$ より $xy = 1$ の方がよい.

③本当は検算が必要だが、この講義では省略してよいことにする.

[1] 変数分離形

$p(x)$, $q(y)$ をそれぞれ x, y の関数として,

$y' = p(x)\cdot q(y)$ の形で表される微分方程式を**変数分離形**という

例 $y' = -\frac{x}{y} \longrightarrow y' = (-x)\cdot\frac{1}{y}$

$(x-1)y' + (y-1) = 0 \longrightarrow y' = \left(-\frac{1}{x-1}\right)\cdot(y-1)$

この形の微分方程式の解き方.

$y' = p(x)\cdot q(y)$ を変形して.

$\frac{1}{q(y)}\cdot y' = p(x)$ の形にする.

ここで両辺を x で積分すると,

$$\int \frac{1}{q(y)} y' \cdot dx = \int p(x) \cdot dx$$

今　$y' = \frac{dy}{dx}$ なので.

$\boxed{\text{公式} \int \frac{1}{q(y)} dy = \int p(x) \cdot dx}$　を得る.

<u>例題</u>.　$(x-1)y' + (y-1) = 0$　の一般解を求めよ

答　$y' = \left(-\frac{1}{x-1}\right) \cdot (y-1)$　として公式を使うと.

$$\int \frac{1}{y-1} dy = \int -\frac{1}{x-1} dx \quad \text{より}$$

$$\log(y-1) = -\log(x-1) + C$$

$$\log(x-1)(y-1) = C$$

$$(x-1)(y-1) = e^C$$

$e^{\log a} = a$ を使っている

e^Cを新しい任意定数とみなしている

ここであらためて. e^C を C でおきなおして.

$(x-1)(y-1) = C$　を得る. これが求める一般解である.

<u>問題</u>. 次の微分方程式を解け

(1) $y' = -\frac{x}{y}$　　(2) $y' \cdot \sin x = y \cdot \cos x$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

(3) $y^3 + x^6 \cdot y' = 0$

答 (1) $p(x) = -x$, $q(y) = \frac{1}{y}$ として公式を用いると.

$$\int y\, dy = \int -x\, dx \quad \text{より}$$

$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$. より.　$x^2 + y^2 = 2C$　となる.

ここで. $2C$ を C でおきなおして.　$x^2 + y^2 = C$　を得る.

(2) $y' = \dfrac{\cos x}{\sin x} \cdot y$ より $P(x) = \dfrac{\cos x}{\sin x}$, $g(y) = y$ として公式を使うと.

$\displaystyle\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx$ となる. これより

$\log y = \log \sin x + C$

$e^{\log y} = e^{\log \sin x + C}$

$. \; y = e^{C} \cdot \sin x$. となる ここで e^{C} を C でおきなおして.

(以下 $e^{C} \to C$ とかく)

$y = C \cdot \sin x$ を得る.

今. $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ より $C = 1$ となり

$y = \sin x$ が求める解 になる.

(3) $y' = -\dfrac{1}{x^6} \cdot y^3$ より $P(x) = -\dfrac{1}{x^6}$, $g(y) = y^3$ として公式を使うと.

$\displaystyle\int \frac{1}{y^3}\,dy = \int -\frac{1}{x^6}\,dx$ となる. これより

$-\frac{1}{2} y^{-2} = \frac{1}{5} x^{-5} + C$

$-5x^5 = 2y^2 + 10C \cdot x^5 \cdot y^2$

$5x^2 + 2y^2 + 10C \cdot x^5 y^2 = 0$

$5x^2 + 2y^2 + C \cdot x^5 y^2 = 0$ $(10C \to C)$ を得る.

<u>変数変換して変数分離形 になるもの</u>.

<u>例題</u>. $y' = (x - y)^2$ の一般解を求める.

$\longrightarrow$ この形では変数分離形ではないが, 以下のように変形する.

$u = x - y$ とおく．（u も x の式で表されている）．

これをもとの式に代入し，y を消去し，x と u の式にする．

$y' = (x-y)^2$

$(x-u)' = u^2$

$1 - u' = u^2$ より $u' = 1 - u^2$ となり．

$p(x) = 1$，$q(u) = 1 - u^2$ とおくと 公式 より．

$\int \frac{1}{1-u^2} du = \int 1\, dx$ とできる．ここで

$\int \frac{1}{1-u^2} du = \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+u} + \frac{1}{1-u} du$

$= \frac{1}{2} \left(\log(1+u) - \log(1-u) \right) = \frac{1}{2} \log \frac{1+u}{1-u}$ となり．

$\frac{1}{2} \log \frac{1+u}{1-u} = x + C$ となる．

$\log \frac{1+u}{1-u} = 2x + 2C$

$\frac{1+u}{1-u} = e^{2x+2C} = e^{2C} \cdot e^{2x} = C \cdot e^{2x}$ $(e^{2C} \to C)$

ここで $u = x - y$ を代入すると．

$\frac{1+x-y}{1-x+y} = C \cdot e^{2x}$ より

$\frac{2}{1-x+y} - 1 = C \cdot e^{2x}$

$2 = (C \cdot e^{2x} + 1)(1 - x + y)$ が求める一般解である

問題. かっこ内の変数変換を用いて. 次を解け.

(1) $xy' = e^{-xy} - y$ $(u = xy)$ ヒント: とりあえず $u = xy$ を微分するとわかりやすい

(2) $y' = (x + e^{y} - 1) \cdot e^{-y}$ $(u = x + e^{y})$

答 (1) $u' = y + xy'$ より. 与式は

$u' = e^{-u}$ とできる. $p(x) = 1$, $q(u) = e^{-u}$ とおくと公式より.

$\int e^{u} du = \int 1 \, dx$. とできる. これより

$e^{u} = x + C$. となる $u = xy$ を代入し.

$e^{xy} = x + C$ が求める解である.

(2) $u' = 1 + y' \cdot e^{y}$ より 与式は

$u' - 1 = u - 1$

$u' = u$ とできる. ここで $p(x) = 1$, $q(u) = u$ とおくと.

$\int \frac{1}{u} du = \int 1 \, dx$ より

$\log u = x + C$.

$u = e^{x+C} = e^{C} \cdot e^{x} = C \cdot e^{x}$ $(e^{C} \to C)$ となる.

ここで $u = x + e^{y}$ を代入すれば.

$e^{y} = C \cdot e^{x} - x$ となる.