連立微分方程式

例題 次を解け

$$\begin{cases} x'(t)+3x(t)+y(t)=0 & x(0)=0 \\ -10x(t)+y'(t)-3y(t)=2e^{t} & y(0)=0. \end{cases}$$

答 ラプラス変換をすると

$$\begin{cases} sX(s)+3X(s)+Y(s)=0 \\ -10X(s)+sY(s)-3Y(s)=\dfrac{2}{s-1} \end{cases} \qquad \begin{cases} (s+3)X(s)+Y(s)=0 \\ -10X(s)+(s-3)Y(s)=\dfrac{2}{s-1} \end{cases}$$ となる

これを $X(s)$, $Y(s)$ について解くと

$$(s^2-9)X(s)+(s-3)Y(s)=0$$

$$-10X(s)+(s-3)Y(s)=\frac{2}{s-1}$$ より

$$X(s)=\frac{-2}{s-1}\cdot\frac{1}{s^2+1}=-\frac{1}{s-1}+\frac{s+1}{s^2+1}$$

$$Y(s)=\frac{2(s+3)}{(s-1)(s^2+1)}=\frac{4}{s-1}-\frac{4s+2}{s^2+1}$$ となり

$$x(t)=-L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)+L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)+L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=-e^{t}+\cos t+\sin t$$

$$y(t)=4\cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)-4\cdot L^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)-2\cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)=4e^{t}-4\cos t-2\sin t$$

となる.

問題 次を解け

(1) $\begin{cases} x'(t)-2y(t)=0 & x(0)=5 \\ y'(t)-2x(t)=0 & y(0)=1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x'(t)-2x(t)+3y(t)=0, & x(0)=3 \\ 2x(t)+y'(t)-y(t)=0 & y(0)=2 \end{cases}$

答(1) ラプラス変換すると

$$\begin{cases} sX(s)-5-2Y(s)=0 \\ sY(s)-1-2X(s)=0 \end{cases}$$ より

$$X(s)=\frac{5s+2}{s^2-4}=\frac{3}{s-2}+\frac{2}{s+2}$$

$$Y(s)=\frac{s+10}{s^2-4}=\frac{3}{s-2}-\frac{2}{s+2}$$ これより

$$x(t)=L^{-1}\left(\frac{3}{s-2}\right)+L^{-1}\left(\frac{2}{s+2}\right)=3\cdot e^{2t}+2\cdot e^{-2t}$$

$$y(t)=L^{-1}\left(\frac{3}{s-2}\right)+L^{-1}\left(\frac{-2}{s+2}\right)=3e^{2t}-2e^{-2t}$$ となる

(2) $sX(s)-3-2X(s)+3Y(s)=0$

$2X(s)+sY(s)-2-Y(s)=0$ より

$$X(s)=\frac{8s-17}{s^2-3s-4}=\frac{3}{s-4}+\frac{5}{s+1}$$

$$Y(s)=\frac{3s-22}{s^2-3s-4}=\frac{-2}{s-4}+\frac{5}{s+1}$$ となる. これより

$$x(t)=L^{-1}\left(\frac{3}{s-4}\right)+L^{-1}\left(\frac{5}{s+1}\right)=3\cdot e^{4t}+5e^{-t}$$

$$y(t)=L^{-1}\left(\frac{-2}{s-4}\right)+L^{-1}\left(\frac{5}{s+1}\right)=-2\cdot e^{4t}+5e^{-t}.$$ である

境界値問題

区間 $[t_0, t_1]$ で定義された関数 $x(t)$ の2階微分方程式について

$x(t_0)=a$, $x(t_1)=b$

である解を求める問題を境界値問題という。

上の条件を境界値 または 境界条件 という。

例題 次を解け

$x''(t)-4x'(t)+5x(t)=0$, $x(0)=0$, $x(\frac{\pi}{2})=1$.

答 $x'(0)=C$ とおき、ラプラス変換すると

$$s^2X(s)-C-4sX(s)+5X(s)=0$$ より

$$X(s)=\frac{C}{s^2-4s+5}=\frac{C}{(s-2)^2+1}$$ となる。これより

$$x(t)=\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{C}{(s-2)^2+1}\right)=C\cdot e^{2t}\cdot\sin t$$

ここで $x(\frac{\pi}{2})=1$ より $1=C\cdot e^{\pi}\cdot 1$ となり $C=e^{-\pi}$.

$\therefore x(t)=e^{2t-\pi}\cdot\sin t$ である

問題 次を解け.

(1) $x''(t)+3x'(t)-4x(t)=0$, $x(0)=0$, $x(1)=1$

(2) $x''(t)-x'(t)-2x(t)=3\cdot e^{2t}$, $x(0)=0$, $x(1)=e^2$

答 (1). $x'(0)=C$ とおき、ラプラス変換すると.

$$s^2X(s)-C+3sX(s)-4X(s)=0$$ より

$$X(s)=\frac{C}{s^2+3s-4}=\frac{C}{5}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+4}\right)$$ となり

$$x(t)=\frac{C}{5}\left(L^{-1}\left(\frac{1}{s-1}\right)-L^{-1}\left(\frac{1}{s+4}\right)\right)=\frac{C}{5}\left(e^{t}-e^{-4t}\right)$$ である.

ここで $x(1)=1$ より. $1=\frac{C}{5}(e-e^{-4})$

$\therefore C=\frac{5}{e-e^{-4}}$ となり

$$x(t)=\frac{e^{t}-e^{-4t}}{e-e^{-4}}$$ となる.

(2) $x'(0)=C$ とし.ラプラス変換すると.

$$s^2X(s)-C-sX(s)-2X(s)=\frac{3}{s-2}$$ より

$$X(s)=\frac{3}{(s-2)(s^2-s-2)}+\frac{C}{s^2-s-2}=\frac{3}{(s-2)^2(s+1)}+\frac{C}{(s-2)(s+1)}$$

$$=\frac{1}{(s-2)^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{3}\frac{1}{s+1}+\frac{C}{3}\cdot\left(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+1}\right).$$ となり

$$x(t)=L^{-1}\left(\frac{1}{(s-2)^2}-\frac{1}{3}\frac{1}{s-2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{C}{3}\left(\frac{1}{s-2}-\frac{1}{s+1}\right)\right)$$

$$=t\cdot e^{2t}-\frac{1}{3}e^{2t}+\frac{1}{3}e^{-t}+\frac{C}{3}e^{2t}-\frac{C}{3}e^{-t}$$ である.

ここで $x(1)=e^2$ より $e^2=e^2-\frac{1}{3}e^2+\frac{1}{3}e^{-1}+\frac{C}{3}e^2-\frac{C}{3}e^{-1}$ となり

$C=1$ を得る.

$\therefore\ x(t)=t\cdot e^{2t}$ である.