合成積

関数 $f(t), g(t)$ に対し．

$$h(t) = \int_0^t f(t-s)\cdot g(s)\cdot ds \qquad (t \geqq 0)$$

を $f(t)$ と $g(t)$ の合成積またはたたみこみといい．$h(t) = f*g(t)$ とかく．

また $t-s=\sigma$ で変数変換すると．$s = t-\sigma$，$ds = -d\sigma$ より

$$h(t) = \int_t^0 f(\sigma)\cdot g(t-\sigma)\,(-d\sigma)$$
$$= \int_0^t g(t-\sigma)\cdot f(\sigma)\cdot d\sigma = g*f(t)$$

となり．$f*g = g*f$ がわかる．

例．ある部屋に．スピーカーと．マイクがあるとする．

スピーカーから．一瞬音をだしたときに．t 秒後にマイクに入る音の大きさを

$g(t)$ で表す．さて．スピーカーから音がでて．その音量を $f(t)$ で表すと．

t 秒後にマイクに入る音の大きさは．

$$\int_0^t f(t-s)\cdot g(s)\cdot ds = f*g(t)$$ で与えられる．

$f(t-s)$：s 秒前にスピーカーから出た音の大きさ

$g(s)$：その音のエコーの割合．

10．合成法則．

$$L(f*g) = L(f)\cdot L(g).$$

例題　$f(t) = t$ と $g(t) = \cos t$ の合成積と．

そのラプラス変換を求めよ．

答. $\cos t * t = \int_0^t s \cdot \cos(t-s) \cdot ds$

$= \left[-s \cdot \sin(t-s)\right]_0^t + \int_0^t \sin(t-s)\, ds$

$= \left[-(-\cos(t-s))\right]_0^t = 1-\cos t$.　である.

$L(\cos t * t) = L(t) \cdot L(\cos t) = \dfrac{1}{s \cdot (s^2+1)}$　である.

問題. 次の関数の合成積とそのラプラス変換を求めよ

(1) $f(t) = t,\ g(t) = e^t$　(2) $f(t) = t,\ g(t) = \sin t$.

答 (1) $e^t * t = \int_0^t s \cdot e^{t-s} ds$

$= \left[-s \cdot e^{t-s}\right]_0^t + \int_0^t e^{t-s} \cdot ds$

$= -t - \left[e^{t-s}\right]_0^t = -t - 1 + e^t$　である

$L(e^t * t) = \dfrac{1}{s^2} \cdot \dfrac{1}{s-1}$　である.

(2). $\sin t * t = \int_0^t s \cdot \sin(t-s) \cdot ds$

$= \left[-(-s\cos(t-s))\right]_0^t - \int_0^t \cos(t-s) \cdot ds$

$= t + \left[\sin(t-s)\right]_0^t = t - \sin t$

$L(\sin t * t) = \dfrac{1}{s^2+1} \cdot \dfrac{1}{s^2}$　である.

ラプラス逆変換

定理 関数 $f(t), g(t)$ に対し．

$L(f(t)) = L(g(t))$ ならば $f(t) = g(t)$．

∵ $L(f(t) - g(t)) = 0$ より

$\int_0^\infty e^{-st}(f(t) - g(t))\,dt = 0$ であるが，

もし．$f(t) \geqq g(t)$ なら $f(t) = g(t)$ でないといけない．

もし．ある $T > 0$ まで．$f(t) \geqq g(t)$ であったとすると．s を大きくとることで．

$0 = \int_0^\infty e^{-st}(f(t) - g(t))\,dt \fallingdotseq \int_0^T e^{-st}(f(t) - g(t))\,dt \geqq 0$ とできる．

これより $[0, T]$ で $f(t) = g(t)$ となる．

あとは $T \to \infty$ とすればよい．

この定理から．$F(s)$ に対し．$L(f(t)) = F(s)$ となる

$f(t)$ がただ1つ存在する．この $f(t)$ を $F(s)$ のラプラス逆変換といい．

$f(t) = L^{-1}(F(s))$ で表す．

ラプラス逆変換は．与えられた関数を基本法則で変形させ．

既知の関数にして．ラプラス変換表を用いることで求められる．

例題．次の関数のラプラス逆変換を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{3s+2}$ (2) $\dfrac{e^{-\pi s}}{s^2 + \lambda^2}$

答. (1) $L^{-1}\left(\frac{1}{3S+2}\right) = \frac{1}{3}\cdot L^{-1}\left(\frac{1}{S+\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}t}$

(2). $F(S) = \frac{\lambda}{S^2+\lambda^2}$ とすると $f(t) = \sin\lambda t$ より.

$$L^{-1}\left(\frac{e^{-\pi S}}{S^2+\lambda^2}\right) = \frac{1}{\lambda}\cdot L^{-1}\left(e^{-\pi S}\cdot\frac{\lambda}{S^2+\lambda^2}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}L^{-1}\left(e^{-\pi S}\cdot F(S)\right) = \frac{1}{\lambda}f(t-\pi)\cdot U(t-\pi)$$

$$= \frac{1}{\lambda}U(t-\pi)\cdot\sin\lambda(t-\pi)$$ である.

問題. ラプラス逆変換を求めよ.

(1) $\frac{1}{2S-1}$ (2) $\frac{S\cdot e^{-3S}}{S^2+\lambda^2}$ (3) $\frac{1}{(S-\lambda)^2}$

答 (1) $L^{-1}\left(\frac{1}{2S-1}\right) = \frac{1}{2}L^{-1}\left(\frac{1}{S-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}t}$

(2) $L^{-1}\left(\frac{S\cdot e^{-3S}}{S^2+\lambda^2}\right) = L^{-1}\left(e^{-3S}\cdot\frac{S}{S^2+\lambda^2}\right)$

$$= U(t-3)\cdot\cos\lambda(t-3)$$

(3). $F(S) = \frac{1}{S^2}$ とすると $f(t) = t$ より

$$L^{-1}\left(\frac{1}{(S-\lambda)^2}\right) = L^{-1}\left(F(S-\lambda)\right) = e^{\lambda t}\cdot t$$ である