線形代数学□　平成24年度前期　期末試験問題

注意：解答の求め方がわかるように記述すること．また，解答の順番は問わない．

1. 次のベクトルが1次独立であるかどうか判定せよ．(15点)

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

2. $\mathbb{R}^3$ の二つの基底を

$$[v_1, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [u_1, u_2, u_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とするとき，$\{v_1, v_2, v_3\}$ から $\{u_1, u_2, u_3\}$ への基底の変換行列を求めよ．(15点)

3. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

と定めるとき，$\ker f$ の基底と次元を求めよ(15点).

4. 次のベクトルが $\mathbb{R}^3$ の正規直交基底であることを示せ．ただし，正規直交基底とは，長さが1であり，かつ互いに直交するベクトルでつくられる基底である．(15点)

$$v_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}, \ v_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -\sqrt{2} \end{bmatrix}, \ v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

5. 次の行列が対角化可能か判定し，可能であれば対角化せよ．(10点)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

6. 行列

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

を次の順序で対角化せよ．(30点)

(1) 行列 B の固有値を求めよ．

(2) 行列 B が対角化可能であるか判定せよ．

(3) 各固有値に属する固有ベクトルをそれぞれ求めよ．

(4) B を対角化する行列 P を求めよ．

(5) P^{-1} を求めよ．

(6) $P^{-1}BP$ を計算せよ．