No.

解答

1.
$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}2&1&4\\-1&2&3\\1&1&3\\2&-1&0\end{bmatrix} \overset{①\leftrightarrow③}{=} \operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&1&3\\-1&2&3\\2&1&4\\2&-1&0\end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&1&3\\0&3&6\\0&-1&-2\\0&-3&-6\end{bmatrix}$$

$$= \operatorname{rank}\begin{bmatrix}1&1&3\\0&3&6\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} = 2$$ より 1次従属である。

2.
$[u_1\ u_2\ u_3] = [v_1\ v_2\ v_3]P$ となればよいので

$$P = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&-1&1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1&-1&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-2&0\\1&1&1\\-1&-1&1\end{bmatrix}$$ である

3.
$$\ker f = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix}1&1&2\\2&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \middle| x+y+2z=0 \right\}$$

より $x+y+2z=0$ をとくと、$y=t$, $z=s$ とおいて

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-t-2s\\t\\s\end{bmatrix} = t\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}$$ より

$$\ker f = \left\langle \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} \right\rangle$$ である これより

基底は $\left\{ \begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix} \right\}$, 次元は 2 である。

4. まず.

$\|v_1\| = (v_1|v_1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(1+1+2) = 1$

$\|v_2\| = (v_2|v_2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}(1+1+2) = 1$

$\|v_3\| = (v_3|v_3)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(1+1+0) = 1$ 　より 正規. 次に.

$(v_1|v_2) = \frac{1}{4}(1+1-2) = 0$

$(v_1|v_3) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-1+0) = 0$

$(v_2|v_3) = \frac{1}{2\sqrt{2}}(1-1+0) = 0$ 　より 互いに直交. さらに

$$\mathrm{rank}[v_1\ v_2\ v_3] = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 3.$$

$\therefore v_1, v_2, v_3$ は1次独立. $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ より これらは基底になる

$\therefore v_1, v_2, v_3$ は正規直交基底である.

5. $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^3$ より 固有値は 1.

$\dim V(1)$ を調べると.

$\mathrm{rank}(E-A) = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$ 　より

$\dim V(1) = 3-1 = 2 \neq 3 =$ 重複度. $\therefore$ 対角化不可である.

No.

6 (1) $\varphi_B(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & -3 \\ -2 & t-2 & -2 \\ -3 & -2 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^2(t-2) - 12 - 12 - 4(t-1) - 4(t-1) - 9(t-2)$

$= (t-2)(t^2-2t+1) - 17t - 24 + 8 + 18$

$= t^3 - 2t^2 + t - 2t^2 + 4t - 2 - 17t + 2$

$= t^3 - 4t^2 - 12t = t(t-6)(t+2)$ より

固有値は. 0, 6, −2 である

(2) 対称行列なので対角化可能

(3) 0 に属する固有ベクトルは.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ より.

$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+2y+2z=0 \\ 3x+2y+z=0 \end{cases}$ より 例えば $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ がある.

6 に属する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 6\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ より

$\begin{cases} x+2y+3z=6x \\ 2x+2y+2z=6y \\ 3x+2y+z=6z \end{cases}$ となり 例えば $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ がある.

−2 に属する固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ より

No.

$$\begin{cases} x+2y+3z=-2x \\ 2x+2y+2z=-2y \\ 3x+2y+z=-2z \end{cases}$$ となり 例えば $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ がある．

(4) (3) より $P=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ とすればよい．

(5) P^{-1}を計算すると

$P^{-1}=\frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$ となる （計算は省略）

(6) $P^{-1}BP=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ である．