§2. 線形写像と行列.

__写像__. 集合 X, Y をとる. $x \in X$ に対し. $y \in Y$ を1つ対応させる方法を.
X から Y への写像 とよび,

$$\begin{array}{cccc} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & y \end{array}$$

と表す.

このとき. X を f の定義域. Y を値域 とよぶ.
また y を $f(x)$ ともかき. x の f による像 という.

__例__. $\mathbb{R}$ から $\mathbb{R}$ への対応 f を.

$f(x) = x^2+1$, $f(x) = x+1$, $f(x) = x$.

などと定義すれば. これらは写像である.

以下. 線形空間から. 線形空間への写像を考え.
V, W を線形空間とする.

__定義 5.1__ $f: V \to W$ が次の条件をみたすとき, f は線形写像であるという.

(1). $\forall x, y \in V$ に対し. $f(x+y) = f(x) + f(y)$

(2) $\forall x \in V$, $r \in \mathbb{R}$ に対し $f(\lambda x) = \lambda \cdot f(x)$

この定義から. ただちに.

$f(\mathbb{0}) = f(0 \cdot \mathbb{0}) = 0 \cdot f(\mathbb{0}) = \mathbb{0}$ と.

$f(-x) = f((-1) \cdot x) = (-1) \cdot f(x) = -f(x)$ がわかる

例. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ とする. 次で定義される $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ は線形写像である.

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{bmatrix}.$$

$\because$ $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とすると.

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x+z \\ y+w \end{bmatrix} = f\left(\begin{bmatrix} x+z \\ y+w \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}\right)$$

また. $r \in \mathbb{R}$ に対し.

$$f\left(r \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = f\left(\begin{bmatrix} rx \\ ry \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} rx \\ ry \end{bmatrix} = r \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = r \cdot f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right)$$ //.

例. A を (m, n) 行列 とし. 写像 $f_A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ を
$\forall x \in \mathbb{R}^n$ に対し.

$f_A(x) = Ax$ で定義すれば. これは線形写像になる.

注意. (i) V から V への線形写像を**線形変換**という.

(ii) $1_V: V \to V$, $1_V(x) = x$ をみたす写像を**恒等写像**という.

(iii) V, W, U は線形空間, $f: V \to W$, $g: W \to U$ を線形写像とするとき,
$g \circ f: V \to U$ を $g \circ f(x) = g(f(x))$ によって定める.
これを f と g の**合成写像**という.

以下写像は線形写像とする.

像と核. $f: V \to W$ について.

$\mathrm{Im} f = \{ f(x) \mid x \in V \}$ を f の像という. $f(V)$ ともかく.

$\ker f = \{ x \in V \mid f(x) = 0 \}$ を f の核という. $f^{-1}(0)$ ともかく.

命題5.1. $f: V \to W$ について. 次が成立.

(1). $\mathrm{Im} f$ は W の部分空間

(2) $\ker f$ は V の部分空間

∵ (1) $x, y \in \mathrm{Im} f$ に対し. $u, v \in V$ が存在して.

$f(u) = x$, $f(v) = y$ とできる.

ここで. $x + y = f(u) + f(v) = f(u+v) \in \mathrm{Im} f$ である.

また. $r \in \mathbb{R}$ に対し.

$r \cdot x = r \cdot f(u) = f(ru) \in \mathrm{Im} f$ もわかる

(2). $x, y \in \ker f$ とすると.

$f(x+y) = f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0$ より $x + y \in \ker f$.

また. $r \in \mathbb{R}$ に対し.

$f(rx) = r \cdot f(x) = r \cdot 0 = 0$ より $r \cdot x \in \ker f$ もわかる.

例題. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を.

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ と定めるとき.

$\ker f$ の基底と次元を求めよ.

答

$$\ker f = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{matrix} x + y = 0 \\ z = 0 \end{matrix} \right\}$$ である．これを解くと．$x = t$ とおいて．

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ 0 \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$ となる． $\therefore \ker f = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle$ より

基底は $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$，次元は 1 である．

問題．$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ とするとき．$\ker f$ の基底と次元を求めよ．

答．

$$\ker f = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x + y + 2z = 0 \right\}$$ となる．これを解くと $x = t, z = s$ とおいて

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t-2s \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$ となる．

$\therefore \ker f = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ より．基底は $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$，次元は 2 である．