

線形代数学 中間テスト演習

1. 次の行列の行列式を求めよ (各 10 点) .

$$(1) A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (2) B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}$$

2. \mathbb{R}^3 において, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ が生成系になっていることを示せ (15 点) .

3. \mathbb{R}^4 の部分空間 W_1, W_2 を

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 4x + 3y + 2z + w = 0 \end{array} \right\},$$
$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x = w \\ x + y + z + w = 0 \end{array} \right\}$$

とすると, $W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ の次元を求めよ (20 点) .

4. 次のベクトルが 1 次独立であるかどうか判定せよ (15 点) .

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

5. 次のベクトルが \mathbb{R}^3 の基底であることを示せ (15 点) .

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

6. \mathbb{R}^3 の二つの基底を

$$[v_1, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, [u_1, u_2, u_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とすると, $\{v_1, v_2, v_3\}$ から $\{u_1, u_2, u_3\}$ への基底の変換行列を求めよ (15 点) .

答 1. (1) $2 \cdot 3 - 2 \cdot 1 = 4$

(2) $(10 + 12 - 2) - (-4 + 10 + 6) = 8$

2.
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{を解くと}$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2}(-x + y + z) \\ b = y - x \\ c = \frac{1}{2}(5x - 3y - z) \end{cases} \quad \text{となり} \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad \text{は}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(-x + y + z) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (y - x) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(5x - 3y - z) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{と}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{の 1 次結合で表せる. } \therefore \text{生成系である}$$

3.
$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 4x + 3y + 2z + w = 0 \end{cases} \quad \text{を解くと.} \quad \begin{cases} x = z + 2w \\ y = -2z - 3w \end{cases} \quad \text{より}$$

$z = t, w = s$ とおいて、一般解は、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t + 2s \\ -2t - 3s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{である}$$

$$\therefore W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{より} \quad \dim W_1 = 2.$$

$$\begin{cases} x = w \\ x + y + z = w = 0 \end{cases} \quad \text{を解くと.} \quad \begin{cases} y = -2z - w \\ x = w \end{cases} \quad \text{より}$$

$z=t, w=s$ とおいて、一般解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ -2t-s \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{である}$$

$$\therefore W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{よ} \quad \dim W_2 = 2.$$

$$\begin{cases} x+2y+3z+4w=0 \\ 4x+3y+2z+w=0 \\ x=w \\ x+y+z+w=0 \end{cases} \quad \text{を解くと} \quad \begin{cases} x=w \\ y=-w \\ z=-w \end{cases} \quad \text{よ} \quad \begin{cases} w=t \text{ とおいて} \\ \text{一般解は} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \\ -t \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{である} \quad \therefore W_1 \cap W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \quad \text{よ} \quad \dim W_1 \cap W_2 = 1.$$

$$\dim W_1 + W_2 = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2 = 3 \quad \text{である.}$$

4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ とすると.

$$\text{rank } A = \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \stackrel{\text{②}-① \times 2, \text{③}-①}}{=} \text{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} = 3.$$

\therefore 1次独立である.

5. $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix}$ とすると.

$$\text{rank } A = \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 1 & -5 & 1 \end{bmatrix} \stackrel{\textcircled{3} - \frac{1}{2} \times \textcircled{1}, \textcircled{2} - \frac{1}{2} \times \textcircled{1}}{=} \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \stackrel{\textcircled{3} + \textcircled{2} \times \frac{11}{7}}{=} \text{rank} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & \frac{7}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \frac{2}{7} \end{bmatrix} = 3.$$

$\therefore v_1, v_2, v_3$ は 1次独立. $\dim \mathbb{R}^3 = 3$ より $\{v_1, v_2, v_3\}$ は基底である.

6. 基底の変換行列 T は

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} T \text{ をみたす.}$$

$$\therefore T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ である.}$$