基底変換と行列.

$\{v_1, \cdots, v_n\}$ と $\{u_1, \cdots, u_n\}$ を Vの基底とすると.

$$u_1 = p_{11} v_1 + p_{21} v_2 + \cdots + p_{n1} v_n$$
$$u_2 = p_{12} v_1 + p_{22} v_2 + \cdots + p_{n2} v_n$$
$$\vdots$$
$$u_n = p_{1n} v_1 + p_{2n} v_2 + \cdots + p_{nn} v_n$$ とできる.

これを行列で表すと

$$[u_1\ u_2\ \cdots\ u_n] = [v_1\ v_2\ \cdots\ v_n] \underbrace{\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}}_{= P}$$ と表せる

この P を $\{v_1, \cdots, v_n\}$ から $\{u_1, \cdots, u_n\}$ への基底の変換行列という.

定理4.16.

(1) $\{u_1, \cdots, u_n\}$ から $\{u_1, \cdots, u_n\}$ への基底の変換行列は単位行列である

(2) $\{v_1, \cdots, v_n\}$ から $\{u_1, \cdots, u_n\}$ への 〃 を P

$\{w_1, \cdots, w_n\}$ から $\{v_1, \cdots, v_n\}$ への 〃 を Q とすると

$\{w_1, \cdots, w_n\}$ から $\{u_1, \cdots, u_n\}$ への 〃 は QP である

(3). $\{v_1, \cdots, v_n\}$ から $\{u_1, \cdots, u_n\}$ への 〃 を P,

$\{u_1, \cdots, u_n\}$ から $\{v_1, \cdots, v_n\}$ への 〃 を Q とすると.

$PQ = QP = E$ である. とくに $Q = P^{-1}$

∵ (1). 定義から $p_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ となるので、単位行列になる

(2) $[u_1 \cdots u_n] = [v_1 \cdots v_n] P = [w_1 \cdots w_n] QP$ よりわかる

(3) (1) と (2) より明らか。 //

成分表示. $\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ を V の基底とすると. $\forall x \in V$ は

$$x = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \cdots + x_n u_n = [u_1 \cdots u_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$ と表せる

この $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ を $\{u_1, \cdots, u_n\}$ に関する x の成分表示 という.

例題. $\left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ から $\{e_1, e_2\}$ への基底の変換行列 A を求めよ

答. $[e_1 \ e_2] = [u_1 \ u_2] A$ より

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} A$$ となる. よって.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$ である

問題. (1) $\left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ から $\{e_1, e_2\}$ への基底の変換行列 A を求めよ

(2). $\left\{ u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ から $\{e_1, e_2, e_3\}$

への基底の変換行列 A を求めよ

答 (1) $[e_1\ e_2] = [u_1\ u_2]A$ より

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}A$$

$$A = \begin{bmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\-1 & 1\end{bmatrix}$$ である

(2) $[e_1\ e_2\ e_3] = [u_1\ u_2\ u_3]A$ より

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}A$$

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 1 & 1\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$ である.

命題 4.17

P を $\{v_1, \cdots, v_n\}$ から $\{u_1, \cdots, u_n\}$ への基底の変換行列とする

x の $\{u_1, \cdots, u_n\}$ に関する成分表示を

$\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ とするとき、$\begin{bmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{bmatrix} = P\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ は. $\{v_1, \cdots, v_n\}$ に関する成分表示である.

$\because$

$$[v_1 \cdots v_n]\begin{bmatrix}y_1\\\vdots\\y_n\end{bmatrix} = [v_1 \cdots v_n]P\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} = [u_1 \cdots u_n]\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix} = x$$ //.

例題. $x = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ の e_1, e_2 に関する成分表示は $x = [e_1\ e_2]\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ である.

x の $\left\{u_1 = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right\}$ に関する成分表示を求めよ.

答 命題4.17と先程の例題より.

$$x=[u_1\ \ u_2]\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=[u_1\ \ u_2]\cdot\frac{1}{2}\cdot\begin{bmatrix}3\\ -1\end{bmatrix}$$ となる.

問題 (1). $x=\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}$ の $\left\{u_1=\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}, u_2=\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}\right.$ に関する成分表示を求めよ.

(2) $x=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$ の $\left\{u_1=\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 0\end{bmatrix}, u_2=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 1\end{bmatrix}, u_3=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -1\end{bmatrix}\right\}$ に関する成分表示を求めよ.

答 (1) 先程の問題より

$$x=[u_1\ \ u_2]\,\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=[u_1\ \ u_2]\,\frac{1}{2}\begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix}$$ である

(2) 先程の問題より

$$x=[u_1\ \ u_2\ \ u_3]\,\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=[u_1\ \ u_2\ \ u_3]\,\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\ 5\\ 1\end{bmatrix}$$ である.