定理 4.11. $\dim V = n$ とし. $v_1, \cdots, v_k \in V$ $(k<n)$ が
1次独立であるとすると. $u_{k+1}, \cdots, u_n \in V$ を付け加えて.
$\{v_1, \cdots, v_k, u_{k+1}, \cdots, u_n\}$ が Vの基底 となるようにできる.

∵ $W = \langle v_1, \cdots, v_k \rangle$ とすると. $\dim W = k < n = \dim V$ より.
Wに含まれない Vのベクトルがある. それを u_{k+1} とする.
すると. $v_1, \cdots, v_k, u_{k+1}$ は 1次独立である

∵ 命題 4.7(3) より もし1次従属であれば,
u_{k+1} は$v_1, \cdots, v_k$ の 1次結合で書かれなければならない.
しかし.そうであれば, $u_{k+1} \in W$ となり矛盾する.

ここでもし. $n = k+1$ なら. 命題 4.10 より. $\{v_1, \cdots, v_k, u_{k+1}\}$ は Vの基底.
もし. $n > k+1$ なら. $\langle v_1, \cdots, v_k, u_{k+1} \rangle$ に入らないベクトル u_{k+2}をとる.
同様の議論をくり返し. $v_1, \cdots, v_k, u_{k+1}, \cdots, u_n$ が 1次独立 になるように
とれば, これは基底 になる.

系 4.12. WをVの部分空間とすると.

(1) $\dim W \leqq \dim V$

(2) $\dim W = \dim V \Rightarrow W = V$

∵ (1). 定理 4.11 より. Wの基底に適当なベクトルを加えて
Vの基底にできる　$\therefore \dim W \leqq \dim V$

(2). 命題 4.10 より. Wの基底が Vの基底 となるので,
$W = \langle w_1, \cdots, w_n \rangle = V$ となる.

例題．$\mathbb{R}^3$の1次独立なベクトル $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ に

適当なベクトル u_3 を付け加えて．$\{v_1, v_2, u_3\}$ が $\mathbb{R}^3$の基底となるようにせよ．

答．$\langle v_1, v_2 \rangle$ に入らない u_3 をとればいいので，例えば．

$u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ とおくき． $u_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$ であることを示す．

今は勘でとる

もし．$u_3 = a \cdot v_1 + b v_2$ とできたとすると．

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = a \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ a+2b \\ a+3b \end{bmatrix}$$

となり．これは解なしである．

$\therefore$ $u_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$ であり．$\{v_1, v_2, u_3\}$ は $\mathbb{R}^3$の基底になる．

問題．$\mathbb{R}^3$の1次独立なベクトル $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ に

適当なベクトル u_3 を付け加えて．$\{v_1, v_2, u_3\}$ が $\mathbb{R}^3$の基底になるようにせよ．

答．例えば，$u_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ とおき．$u_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$ を示す．

もし．$u_3 = a v_1 + b v_2$ とできたとすると．

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b \\ a-b \\ 0 \end{bmatrix}$$

となり．これは解なし．

$\therefore$ $u_3 \notin \langle v_1, v_2 \rangle$ であり．$\{v_1, v_2, u_3\}$ は $\mathbb{R}^3$の基底になる．

命題4.13. W_1, W_2 を V の部分空間とするとき.

$\dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$ である

$\because$ $\{w_1, \cdots, w_k\}$ を $W_1 \cap W_2$ の基底とする.

$W_1 \cap W_2$ は W_1, W_2 の部分空間なので.

$\{w_1, \cdots, w_k, u_1, \cdots, u_t\}$ が W_1 の基底に

$\{w_1, \cdots, w_k, v_1, \cdots, v_s\}$ が W_2 の基底になるようにとれる.

ここで. $\{w_1, \cdots, w_k, u_1, \cdots, u_t, v_1, \cdots, v_s\}$ が W_1+W_2 の基底になる

$\because$ 生成系　$W_1+W_2 \ni {}^\forall x+y$　$(x \in W_1, y \in W_2)$ に対し.

$x = a_1w_1 + \cdots + a_kw_k + b_1u_1 + \cdots + b_tu_t$

$y = c_1w_1 + \cdots + c_kw_k + d_1v_1 + \cdots + d_sv_s$　とできる

$\therefore$ $x+y = (a_1+c_1)w_1 + \cdots + (a_k+c_k)w_k + b_1u_1 + \cdots + b_tu_t + d_1v_1 + \cdots + d_sv_s$

となり 生成系であることがわかる.

1次独立.

$a_1w_1 + \cdots + a_kw_k + b_1u_1 + \cdots + b_tu_t + c_1v_1 + \cdots + c_sv_s = 0$　とする

もし. $c_1, \cdots, c_s = 0$ なら. $a_1, \cdots, a_k, b_1, \cdots, b_t$ は 0 になる.

また $c_1, \cdots, c_s$ の中に 0 でないものがあったとすると.

$W_1 \ni x = a_1w_1 + \cdots + a_kw_k + b_1u_1 + \cdots + b_tu_t = -c_1v_1 - \cdots - c_sv_s \in W_2$

より. $x \in W_1 \cap W_2$ となり.

$x = d_1w_1 + \cdots + d_kw_k$ とかける. これより

$d_1w_1 + \cdots + d_kw_k + c_1v_1 + \cdots + c_sv_s = 0$　となり. $c_1, \cdots, c_s = 0$ である.
これは矛盾 //

<u>系4.14</u>. W_1, W_2 が V の部分空間, $V = W_1 + W_2$ とすると.

$V = W_1 \oplus W_2$ である必要+分条件は $\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$ である.

∵ $\dim W_1 \cap W_2 = 0$ より明らか.

<u>命題4.15</u>. W が V の部分空間であるとき.

$V = W \oplus W'$ となる W' が存在する.

∵ $\{w_1, \cdots, w_k\}$ を W の基底とすると. $u_1, \cdots, u_r$ を適当にとって.

$\{w_1, \cdots, w_k, u_1, \cdots, u_r\}$ が V の基底になるようにできる.

$W' = \langle u_1, \cdots, u_r \rangle$ とすれば,

$\dim V = k + r = \dim W + \dim W'$ より $V = W \oplus W'$ である

<u>問題</u>. $\mathbb{R}^3$ において.

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x = y = z \right\}$$

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x + y + z = 0 \right\}$$ とするとき.

・$W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ の次元をそれぞれ求めよ.

答. $x = y = z$ を解くと. 一般解は $z = t$ とおいて.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ より $W_1 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ ∴ $\dim W_1 = 1$

$x+y+z=0$ を解くと. 一般解は. $x=t,\ y=s$ とおいて.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ -t-s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ より $W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

$\therefore \dim W_2 = 2$.

$$W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} x=y=z \\ x+y+z=0 \end{matrix} \right\}$$ より.

$\begin{cases} x=y=z \\ x+y+z=0 \end{cases}$ を解くと. 解は $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$ だけである.

$\therefore W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ より $\dim W_1 \cap W_2 = 0$ である.

$\therefore \dim W_1 + W_2 = 1+2-0 = 3$ である.