系6.7. Aが異なるn個の固有値をもてば、Aは対角化可能

∵ 定理6.4(1)より各固有値の固有ベクトルは1次独立

定理6.6(2)をみたすので、Aは対角化可能

例題. $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}$ が対角化可能か判定し、可能なら対角化せよ.

答. $\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}t&-1&0\\-1&t-1&-1\\0&-1&t\end{vmatrix}=t^2(t-1)-2t=t(t-2)(t+1)$ より

固有値は $0, 2, -1$ であり異なる3つの固有値をもつので Aは対角化可能

固有値0の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \text{が挙げられる}$$

固有値2の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \text{が挙げられる}$$

固有値−1の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} \text{が挙げられる. これより}$$

$P=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&-1\\-1&1&1\end{bmatrix}$ とすれば $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{bmatrix}$ となる.

問題. 次の行列が対角化可能か判定し、可能なら対角化せよ

(1) $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{bmatrix}$ (2) $B=\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\1 & -3 & 1\\0 & -2 & 2\end{bmatrix}$

答 (1) $\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}t-1 & -3\\-3 & t-1\end{vmatrix}=(t-1)^2-9=(t-4)(t+2)$

より固有値は 4 と -2. 異なる2つの固有値をもつので、A は対角化可能.

ここで固有値4の固有ベクトルは

$\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=4\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ が挙げられる

固有値 -2 の固有ベクトルは

$\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ が挙げられる. これより

$P=\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}$ とすれば、$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}4 & 0\\0 & -2\end{bmatrix}$ となる.

(2) $\varphi_B(t)=\begin{vmatrix}t-2 & 2 & 0\\-1 & t+3 & -1\\0 & 2 & t-2\end{vmatrix}=(t-2)^2\cdot(t+3)+2(t-2)+2(t-2)$

$=(t-2)(t+2)(t-1)$

より固有値は 1, 2, -2. 異なる3つの固有値をもつので、A は対角化可能.

ここで固有値1の固有ベクトルは

$\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\1 & -3 & 1\\0 & -2 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix}$ が挙げられる.

固有値 2 の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ より $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ が挙げられる

固有値 −2 の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$ より $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ が挙げられる　これより

$P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ とおけば　$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ となる.

例題　$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ が対角化可能か判定し.可能なら対角化せよ.

答. $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t & 2 & -2 \\ -1 & t+3 & -1 \\ -2 & 2 & t \end{vmatrix} = t^2(t+3)+4+4+2t+2t-4(t+3)$

$$= (t-1)\cdot(t+2)^2$$

∴固有値は 1 と −2 .

$\dim V(1) = 1$ はわかっているので.　$\dim V(-2) = 2$ であれば対角化可能. ここで.

$$\mathrm{rank}(-2E-A) = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$ より

$\dim V(-2) = 3 - \mathrm{rank}(-2E-A) = 2$ となり対角化可能.

ここで固有値 1 の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{が挙げられる.}$$

$V(-2)$ を調べると.

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{cases} -2y+2z=-2x \\ x-3y+z=-2y \\ 2x-2y=-2z \end{cases} \quad \text{となる. これを解くと.}$$

$x=t$, $y=s$ とおくと. $z=-x+y$ より一般解は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ -t+s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{となり} \quad V(-2) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle \text{である}$$

$\therefore$ $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ とおけば. $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$ となる.

問題. 次の行列が対角化可能か判定し、可能であれば対角化せよ

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (2) $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

答 (1) $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 0 & t-1 \end{vmatrix} = (t-1)^3$ より. 固有値は 1 .

$$\operatorname{rank}(E-A) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \quad \text{より}$$

$\dim V(1) = 3-1 = 2$. $\therefore$ 対角化できない

(2) $\varphi_B(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & -1 \\ -1 & t-2 & -1 \\ -1 & -1 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^3 - 2 - 3(t-2) = (t-1)^2(t-4)$.

より固有値は 1 と 4．ここで

$\mathrm{rank}(E-B) = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$ より

$\dim V(1) = 3 - 1 = 2$ であり．B は対角化可能．$V(1)$ を調べると．

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ より $\begin{cases} 2x+y+z=x \\ x+2y+z=y \\ x+y+2z=z \end{cases}$ となる．

$x=t$，$y=s$ とおけば、$z=-x-y$ より一般解は，

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ s \\ -t-s \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ となり $V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ となる

固有値4の固有ベクトルは

$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ より $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が挙げられる

∴ $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ とすれば $P^{-1}BP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ となる．