例題. $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}$ の固有値とその重複度, また固有空間の次元を求めよ.

答. $\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}t-1&-1&-1\\0&t-1&-1\\0&0&t-1\end{vmatrix}=(t-1)^3$ より

固有値は 1, 重複度は 3. また.

$\mathrm{rank}(E-A)=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0&-1&-1\\0&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}=2$ より

$\dim V(1)=\dim \mathbb{R}^3-\mathrm{rank}(E-A)=3-2=1$ である.

問題. 次の行列の.固有値とその重複度, また固有空間の次元を求めよ.

(1) $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$ (2) $B=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ (3) $C=\begin{bmatrix}-3&0&0\\4&5&-4\\2&4&-5\end{bmatrix}$

答 (1) $\varphi_A(t)=\begin{vmatrix}t-2&-1\\-1&t-2\end{vmatrix}=(t-2)^2-1=(t-1)(t-3)$ より

固有値は 1と3 重複度は ともに 1.

また定理6.4 より $\dim V(1)=\dim V(3)=1$.

(2) $\varphi_B(t)=\begin{vmatrix}t-1&0&-1\\0&t-1&0\\0&0&t-1\end{vmatrix}=(t-1)^3$ より 固有値は1.

重複度は3.

また $\mathrm{rank}(E-A)=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}=1$ より

$\dim V(1)=2$ である.

(3) $\varphi_C(t) = \begin{vmatrix} t+3 & 0 & 0 \\ -4 & t-5 & 4 \\ -2 & -4 & t+5 \end{vmatrix} = (t+3)\big((t-5)(t+5)-16\big) = (t-3)\cdot(t+3)^2$

より固有値は 3 と -3，重複度はそれぞれ 1 と 2 である．

定理6.5より $\dim V(3)=1$．また

②−③×2．③と①を交換．

$\operatorname{rank}(-3E-C) = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & -8 & 4 \\ -2 & -4 & 2 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$

より $\dim V(-3)=2$ である

<u>行列の対角化</u>：

(n,n) 行列 A が，ある n 次正則行列 P を使って．

$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix}$ と変形できるとき．

A は**対角化可能**という．また．A は P によって**対角化される**という．

<u>定理6.5</u>． $\varphi_A(t) = (t-\lambda_1)^{n_1}\cdot(t-\lambda_2)^{n_2}\cdot\cdots\cdot(t-\lambda_k)^{n_k}$ であるとする

ただし．$\lambda_i \neq \lambda_j$ $(i \neq j)$，$n_i \geq 1$，$n_1+n_2+\cdots+n_k = n$ とする．このとき次は同値．

(1) A は対角化可能

(2) n 個の1次独立な A の固有ベクトルが存在．

(3) $\mathbb{R}^n = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k)$

(4) $\dim V(\lambda_i) = n_i$

(5) $\operatorname{rank}(\lambda_i E - A) = n - n_i$

(1)⇒(2). 正則行列 P が存在して.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix}$$ とできたとする. $P = [p_1\ p_2 \cdots p_n]$ と表したとき.

$$AP = P\begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix} = [p_1\ p_2 \cdots p_n]\begin{bmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & a_n \end{bmatrix} = [a_1p_1\ \ a_2p_2\ \cdots\ a_np_n]$$ となる.

$\therefore$ $AP = A\cdot[p_1\ p_2 \cdots p_n] = [Ap_1\ \ Ap_2 \cdots Ap_n]$ より $Ap_i = a_ip_i$ となる.

$\therefore$ p_i は固有ベクトル. Pは正則行列なので. $p_1, \cdots, p_n$ は 1次独立. (系4.6より)

(2)⇒(3) $p_1, \cdots, p_n$ を 1次独立な固有ベクトルとすると.

$p_1, \cdots, p_n$ は $V(\lambda_1), \cdots, V(\lambda_k)$ のいずれかに含まれる.

定理6.4 より $V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) = \{0\}$ $(i \neq j)$ より

$\mathbb{R}^n \supset V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k) \supset \langle p_1, p_2, \cdots, p_n \rangle = \mathbb{R}^n$.

$\therefore$ $\mathbb{R}^n = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k)$

(3)⇒(4) $\mathbb{R}^n = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_k)$ より

$n = \dim V(\lambda_1) + \cdots + \dim V(\lambda_k)$ (系4.14)

定理6.5 より $\dim V(\lambda_i) \leqq n_i$ かつ

$n = n_1 + \cdots + n_k$ なので

$\dim V(\lambda_i) = n_i$ でないといけない

(4)⇔(5)　$\dim V(\lambda_i) = n - \mathrm{rank}(\lambda_i E - A)$ より求まる.

(4)⇒(1)　$V(\lambda_i)$ の基底を $\{p_{i1}, p_{i2}, \cdots, p_{in_i}\}$ とする.

今　$P = [p_{11}, p_{12}, \cdots, p_{1n_1}, p_{21}, \cdots, p_{kn_k}]$ とおくと. これは正則行列で.

これの左から m番目のもの

$$P^{-1}AP \cdot e_m = P^{-1} A \cdot p_{ij} = P^{-1} \cdot \lambda_i p_{ij} = \lambda_i e_m$$ となる.

これを行列で表せば.

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \overbrace{\lambda_1 \ \ddots \ \lambda_1}^{n_1 個} & & & 0 \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_k \end{bmatrix}$$ となる.

<u>系 6.6</u>. Aが相異なる n個の固有値をもてば、Aは対角化可能.

⟶ Aを対角化する Pを作るには.

n個の1次独立な固有ベクトルを並べればよい!