例題. $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}$ の固有値と固有ベクトルを1つ求めよ.

答 $\varphi_A(t)=|tE-A|=\begin{vmatrix}t-2&-1\\-1&t-2\end{vmatrix}=(t-2)^2-1=(t-1)(t-3)$ より

$\varphi_A(t)=0$ の解は $t=1,3$. ∴ 固有値は 1と3.

ここで固有値1に属する固有ベクトルを求めると.

$\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ より $\begin{cases}2x+y=x\\x+2y=y\end{cases}$ となり $x=t$ とおいて. 一般解は

$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\-t\end{bmatrix}=t\cdot\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ となる. ∴ 固有ベクトルは $\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$ である.

固有空間. 固有値λに対し.

$V(\lambda)=\ker(\lambda E-A)=\{x\in\mathbb{R}^n \mid (\lambda E-A)x=0\}$

は固有値λに属する固有ベクトルと 0 からなる部分空間である.

これを固有値λに対する固有空間という.

例題. $A=\begin{bmatrix}-1&2&0\\2&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ に対し. $V(1)$ を求めよ.

答. $\varphi_A(t)=|tE-A|=\begin{vmatrix}t+1&-2&0\\-2&t+1&0\\0&0&t-1\end{vmatrix}=(t-1)\left((t+1)^2-4\right)$

$=(t-1)(t^2+2t-3)=(t-1)^2(t+3)$ である. $V(1)$ のベクトルは

$\begin{bmatrix}-1&2&0\\2&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ をみたすので. $\begin{cases}-x+2y=x\\2x-y=y\\z=z\end{cases}$ となる.

これを解くと. $x=t$, $z=s$ とおいて.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ s \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$ より $V(1) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ である

問題.

(1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ に対し. $V(4)$ を求めよ

(2) $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ の固有値と $V(0)$ を求めよ.

答 (1). $V(4)$ のベクトルは

$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ をみたすので, $\begin{cases} 2x+2y=4x \\ x+3y=4y \end{cases}$ となる.

これを解くと. $x=t$ とおいて.

$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる $\therefore V(4) = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ である

(2) $$\varphi_B(t) = |tE-B| = \begin{vmatrix} t & -2 & 0 \\ 2 & t-1 & -3 \\ 0 & -2 & t \end{vmatrix} = t^2(t-1)+4t-6t$$
$$= t(t^2-t-2) = t(t-2)(t+1)$$

$\therefore$ 固有値は $0, -1, 2$ である. $V(0)$ のベクトルは

$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0$ をみたすので $\begin{cases} 2y=0 \\ -2x+y+3z=0 \\ 2y=0 \end{cases}$ となる.
これを解くと. $x=3t$ とおいて.

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3t \\ 0 \\ 2t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$ より $V(0) = \left\langle \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right\rangle$ である

次の定理は証明せずに用いる.

定理 5.11. A が (n,n) 行列のとき.

$$\mathrm{rank}\,A = \dim \mathrm{Im}\,A.$$

命題 6.2. A を (n,n) 行列. P を n 次正則行列とすると.

(1) $\varphi_A(t) = \varphi_{P^{-1}AP}(t)$

(2) A の固有値と $P^{-1}AP$ の固有値は等しい.

(3) λ が A の固有値なら

$$\dim V(\lambda) = n - \mathrm{rank}(\lambda E - A)$$

(1) $\varphi_{P^{-1}AP}(t) = |tE - P^{-1}AP| = |P^{-1}(tE-A)P|$

$= |P^{-1}|\cdot|tE-A|\cdot|P| = |tE-A| = \varphi_A(t)$

(2) (1) より明らか.

(3) $n = \dim \ker(\lambda E - A) + \dim \mathrm{Im}(\lambda E - A)$

$= \dim V(\lambda) + \mathrm{rank}(\lambda E - A)$ よりわかる.

定理 6.4. A を (n,n) 行列とする

(1) A の異なる固有値に属する固有ベクトルは 1 次独立

(2) λ_i, λ_j が A の異なる固有値なら. $V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) = \{0\}$

(3). $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ が A の異なる固有値なら. $\dim V(\lambda_i) = 1$.

☺ (1). 帰納法を使う.

$n=1$ のときは. ベクトルが1つだけなので1次独立.

今. $\lambda_1, \cdots, \lambda_{k+1}$ を異なる固有値. $x_1, \cdots, x_{k+1}$ をそれぞれの固有ベクトルとする

$x_1, \cdots, x_k$ が1次独立として. $x_1, \cdots, x_{k+1}$ が1次独立を示す.

$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_kx_k + a_{k+1}x_{k+1} = 0$ とする.

$a_{k+1} = 0$ なら. $a_1 = \cdots = a_k = 0$ となるので. $a_{k+1} \neq 0$ と仮定すると.

$x_{k+1} = \frac{a_1}{a_{k+1}}x_1 + \cdots + \frac{a_k}{a_{k+1}}x_k = b_1x_1 + \cdots + b_kx_k$ となる

両辺に A をかけると

$\lambda_{k+1}x_{k+1} = \lambda_1b_1x_1 + \cdots + \lambda_kb_kx_k$.

また λ_{k+1} をかけると.

$\lambda_{k+1} \cdot x_{k+1} = \lambda_{k+1}b_1x_1 + \cdots + \lambda_{k+1}b_kx_k$ となる. これより

$0 = (\lambda_1 - \lambda_{k+1})b_1x_1 + \cdots + (\lambda_k - \lambda_{k+1})b_kx_k$ となり

$b_1 = \cdots = b_k = 0$ となり $x_{k+1} = 0$. しかしこれは矛盾. ∴ $a_{k+1} = 0$ となる.

(2) $V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) \neq \{0\}$ なら. $V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j) \ni x \neq 0$ ととれるが.

これは (1) に矛盾.

(3). $V(\lambda_i) \ni x_i \neq 0$ とすると. $\{x_1, \cdots, x_n\}$ は基底になる 今 $V(\lambda_1) \ni x'$ とすると.

$x' = a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n$ より $1 \cdot (a_1x_1 - x') + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ とできる.

これより. $a_1x_1 - x' = 0$ となり. $V(\lambda_1) = \langle x_1 \rangle$ がわかり

$\dim V(\lambda_1) = 1$ となる.

定理6.5. Aを(n,n)行列，λをAの固有値，kを固有値λの重複度とするとき，

$$\dim V(\lambda) \leqq k$$ である．

∵ $\dim V(\lambda) \geqq k+1$ であったとすると．

$x_1, \cdots, x_{k+1} \in V(\lambda)$ が1次独立であるようにとることができる．

さらに．$y_1, \cdots, y_{n-k-1} \in \mathbb{R}^n$ を $\{x_1, \cdots, x_{k+1}, y_1, \cdots, y_{n-k+1}\}$ が

$\mathbb{R}^n$の基底となるようにとる．ここで

$P = [x_1, \cdots, x_{k+1}, y_1, \cdots, y_{n-k-1}]$ とおくと．

$$\begin{aligned}
AP &= A \cdot [x_1, \cdots, x_{k+1}, y_1, \cdots, y_{n-k-1}] \\
&= [Ax_1, \cdots, Ax_{k+1}, Ay_1, \cdots, A \cdot y_{n-k-1}] \\
&= [\lambda x_1, \cdots, \lambda x_{k+1}, Ay_1, \cdots, Ay_{n-k-1}]
\end{aligned}$$ より

$$\begin{aligned}
\varphi_A(t) \cdot |P| &= |(tE-A) \cdot P| \\
&= |[tx_1, \cdots, tx_{k+1}, ty_1, \cdots, ty_{n-k-1}] \\
&\qquad - [\lambda x_1, \cdots, \lambda x_{k+1}, Ay_1, \cdots, Ay_{n-k-1}]| \\
&= |[(t-\lambda)x_1, \cdots, (t-\lambda)x_{k+1}, (tE-A)y_1, \cdots, (tE-A)y_{n-k-1}]| \\
&= (t-\lambda)^{k+1} |[x_1, \cdots, x_{k+1}, (tE-A)y_1, \cdots, (tE-A)y_{n-k+1}]|
\end{aligned}$$

より重複度は $k+1$より大きくなる．∴矛盾．

これより $\dim V(\lambda) \leqq k$ である