

### §3. 行列の対角化

線形変換  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ x+2y \end{bmatrix} \quad \text{と} \text{する.}$$

$\{e_1, e_2\}$  と  $\{e_1, e_2\}$  に関する  $f$  の表現行列は

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{である}$$

ここで  $\mathbb{R}^2$  を基底  $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  に対し.

$$f(u_1) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot u_1 = [u_1 \ u_2] \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(u_2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = u_2 = [u_1 \ u_2] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{となるので.}$$

$f$  の  $\{u_1, u_2\}$  と  $\{u_1, u_2\}$  に関する表現行列は.

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{と} \text{できる.}$$

また、 $\{e_1, e_2\}$  から  $\{u_1, u_2\}$  の基底の変換行列  $P$  は

$$[u_1 \ u_2] = [e_1 \ e_2] P \quad \text{より} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{である.}$$

このとき命題 5.7 から

★ ...  $B = P^{-1}AP$  の関係が成り立つ.

ここで、 $B$  のように対角部分にのみ 0 でない値が入る行列を **対角行列** といい.

★ のように  $P$  を使って対角行列になるとき、 **$f$  の対角化** という.

( $A = PBP^{-1}$  を対角化という場合もある)

固有値と固有ベクトル

線形変換  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  に対し.

$$f(u) = \lambda u \quad (u \neq 0)$$

をみたすスカラーを  $f$  の **固有値** といい.

$u$  を固有値  $\lambda$  に属する **固有ベクトル** という.

● 単に行列  $A$  に対し.

$Au = \lambda u$  をみたすときも同様の言葉を使う.

ここで、 $Au = \lambda u$  は

$$(\lambda E - A)u = 0 \quad \text{と表せる.}$$

すなわち、これをみたす  $u$  がとれると、連立1次方程式の自明でない解が存在するので、

$$|\lambda E - A| = 0 \quad \text{となる (系3.20より, 逆もいえる).}$$

すなわち、

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad \text{である}$$

したがって、 $\lambda$  が  $A$  の固有値  $\Leftrightarrow |\lambda E - A| = 0$  である.

ここで、 $t$  を変数とする  $n$  次多項式.

$\varphi_A(t) = |tE - A|$  を  $A$  の **固有多項式** といい.

$\varphi_A(t) = 0$  を  $A$  の **固有方程式** という.

$\rightarrow \lambda$  が  $A$  の固有値  $\Leftrightarrow \lambda$  が  $\varphi_A(t) = 0$  の解.

ここで、 $\varphi_A(t)=0$  の解は複素数解を含めれば  $n$  個ある。

以後、解の重複度を固有値の **重複度** という。まとめると次のようになる。

命題 6.1. (1)  $A$  の固有値は  $\varphi_A(t)=0$  の解であり、

重複度も込めて  $n$  個ある

(2) 固有値  $\lambda$  に属する固有ベクトルは

$(\lambda E - A)x = 0$  をみたす自明でない  $x$  である。

例題

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$  の固有値を求め、固有ベクトルを1つ導け。

解答

$$\varphi_A(t) = |t \cdot E - A| = \begin{vmatrix} t-2 & -1 & 0 \\ -1 & t-3 & 0 \\ 0 & 0 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2) \cdot \begin{vmatrix} t-2 & -1 \\ -1 & t-3 \end{vmatrix}$$

$$= (t-2) \left( (t-2)(t-3) - 1 \right) = (t-2)(t^2 - 5t + 5) \quad \text{である。}$$

これを解けば、固有値は  $2, \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$  である。

例えば固有値  $2$  に属する固有ベクトルは、

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{となるベクトルであるので、これを解くと。}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 2x \\ x + 3y = 2y \\ 2z = 2z \end{cases} \quad \text{よ) } \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t \end{cases} \quad \text{となる。} \quad \therefore \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{は固有ベクトルである}$$

問題 (1)  $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$  の固有値を求め固有ベクトルを1つ導け

(2)  $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$  の固有値を求め固有ベクトルを1つ導け

答 (1)  $\varphi_A(t) = \begin{vmatrix} t-2 & -2 \\ -1 & t-3 \end{vmatrix} = (t-2)(t-3) - 2 = t^2 - 5t + 4$  より

$\varphi_A(t) = 0$  を解けば、固有値は 1 と 4 である。

固有値 1 に属する固有ベクトルは、

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ を解くと、 } y = t \text{ とおいて、 } x = -2t \text{ となり、一般解は}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ となり、 } \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ が固有ベクトルになる。}$$

(2)  $\varphi_B(t) = \begin{vmatrix} t-1 & -2 & 1 \\ -1 & t & -1 \\ 0 & -2 & t \end{vmatrix} = t^2(t-1) + 2 - 2t - 2(t-1) = (t-1)(t+2)(t-2)$

よ)  $\varphi_B(t) = 0$  を解けば、固有値は 1, 2, -2 である。

固有値 1 に属する固有ベクトルは、

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \text{ より } \begin{cases} x+2y-z = x \\ x+z = y \\ 2y = z \end{cases} \text{ となる。これを解くと、}$$

$y = t$  とおいて、 $z = 2t$ ,  $x = -t$  となり一般解は、

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t \\ t \\ 2t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ となり、 } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ が固有ベクトルになる}$$