解答

1. $P(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$　　$P(A|B)=\frac{1}{4}$　より

$P(A)=P(A|B)$ なので、A と B は独立.

2. ベイズの定理から、求める確率は

$$\frac{0.4\times0.02}{0.4\times0.02+0.3\times0.04+0.3\times0.05}=\frac{8}{35}$$

3. 1コ振ったときを Y とすると

$E(Y)=\frac{1}{6}(1+2+\cdots+6)=\frac{7}{2}$

$V(Y)=E(Y^2)-E(Y)^2=\frac{1}{6}(1^2+2^2+\cdots+6^2)-\frac{49}{4}$

$=\frac{35}{12}$　　より

$E(X)=5\cdot E(Y)=\frac{35}{2}$, $V(Y)=5\times\frac{35}{12}=\frac{175}{12}$

$\sigma(Y)=\sqrt{\frac{175}{12}}$　　である

4. $p_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dy=\frac{1}{4}e^{-|x|}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-|y|}dy$

$=\frac{1}{4}e^{-|x|}\left(\int_{-\infty}^{0}e^{y}dy+\int_{0}^{\infty}e^{-y}dy\right)$

$=\frac{1}{4}e^{-|x|}\left(\left[e^{y}\right]_{-\infty}^{0}+\left[-e^{-y}\right]_{0}^{\infty}\right)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$

同様にすると

$p_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty}p(x,y)\,dx=\frac{1}{2}e^{-|y|}$

$p(x,y)=p_1(x)\cdot p_2(y)$　より　X と Y は独立である.

No.

5. $E((X-E(X))^2) = E(X^2 - 2E(X)X + E(X)^2)$

$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$ よりわかる、

6. 100個の標本の平均を X とおくと、X は $N(\mu, \frac{25}{100})$ に従う.

ここで、$P(X-\delta \leqq \mu \leqq X+\delta) = 0.99$ となる δ を求めると.

$P(X-\delta \leqq \mu \leqq X+\delta) = P(\mu-\delta \leqq X \leqq \mu+\delta) \cdots *$

ここで $Z = \dfrac{X-\mu}{\frac{1}{2}}$ とおくとこれは $N(0,1)$ に従い

$* = P(-2\delta \leqq Z \leqq 2\delta) = 2P(0 \leqq Z \leqq 2\delta) = 0.99$ となる

$P(0 \leqq Z \leqq 2\delta) = 0.495$ より

$2\delta = 2.5758$ $\therefore \delta = 1.287\cdots \fallingdotseq 1.3$ となる

∴平均身長の99%信頼区間は $168.5 \leqq \mu \leqq 171.1$ である.

7. $H_0 : \mu = 49.4$ $H_1 : \mu < 48.2$

X を標本平均とすると、X は $N(\mu, \frac{(6.91)^2}{200})$ に従う.

ここで $Z = \dfrac{X-\mu}{\frac{6.91}{\sqrt{200}}} = \dfrac{10\sqrt{2}}{6.91}(X-\mu)$ は $N(0,1)$ に従う.

$P(Z < \theta) = 0.05$ となるのは $\theta = -1.6449$ なので.

$Z < -1.6449$ が棄却域である. Z の実現値は

$Z = \dfrac{10\sqrt{2}}{6.91}(48.2 - 49.4) \fallingdotseq -2.46$

これより H_1 が採択され、下まわるといってよい.