期待値と分散

期待値

期待値は確率変数の平均値のようなものである.

定義 1.5.1. 確率変数 X について.

離散のとき : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$

連続のとき : $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) \cdot dx$

によって定義される $E(X)$ を X の**期待値**という.

例. (1). トランプを引いたときの数を X とすると. 期待値は.

$$E(X) = 1 \cdot \frac{1}{13} + 2 \cdot \frac{1}{13} + 3 \cdot \frac{1}{13} + \cdots + 13 \cdot \frac{1}{3}$$

$$= \frac{1}{13}(1+2+\cdots+13) = 7.$$ である.

(2) $p(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & 0 \leqq x \leqq 1 \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$ で与えられているとき、期待値は.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x\, p(x)\, dx = \int_{0}^{1} 6x^2(1-x)\, dx$$

$$= \left[2x^3 - \frac{3}{2}x^4\right]_0^1 = 2 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$ である.

問題 (1) サイコロをふって出た目を X とするとき. $E(X)$ を求めよ.

(2) $P(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leqq x \leqq b \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$ とするとき, $E(X)$ を求めよ.

答 (1). $E(X) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \cdots + 6 \cdot \frac{1}{6} = \frac{7}{2}$

(2) $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p(x) \cdot dx = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\, dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{2}(b^2 - a^2)$

$$= \frac{1}{2}(b+a)$$ である.

Xを x_i または x をとる確率変数とする。関数 f により、

$y_i = f(x_i)$, $y = f(x)$ となるとき。

この y_i や y をとる確率変数 Y を考えることができ、これを $Y = f(X)$ と書く。

例. サイコロをふって、出た目×100円もらえるとする。Xをサイコロの出た目としておく。

関数として、$f(x) = 100x$ を使うともらえる金額 Y は、

$Y = 100 \cdot X = f(X)$ とできる。

この Y の期待値は、

離散: $E(Y) = \sum_{i=1}^{n} y_i p_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) p_i$

連続: $E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot p(x) \cdot dx$ になる。

定理1.5.2. Xを確率変数, aを定数とすると、

(i) $E(X+a) = E(X) + a$ $\leftarrow f(x) = x + a$

(ii) $E(aX) = a \cdot E(X)$ $\leftarrow f(x) = ax$

∵ (i) $E(X+a) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i + a) \cdot p_i$

$= \sum_{i=1}^{n} x_i p_i + a \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i = E(X) + a$.

(ii) $E(aX) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} a x_i p_i = a \cdot E(X)$

よりわかる。連続型も同様。

またこの定理から、

$E(aX+b) = a \cdot E(X) + b$.

$E(X - E(X)) = 0$ がすぐわかる。

さらに、関数 f と g に対し、

$E(f(X)+g(X)) = E(f(X)) + E(g(X))$ もわかる。

$\because$ $E(f(X)+g(X)) = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i)+g(x_i))p_i$

$= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)p_i + \sum_{i=1}^{n} g(x_i)p_i = E(f(X)) + E(g(X))$

すなわち、E は線形（足し算をバラバラにして、スカラー倍は前に出せる）である。