確率・統計

確率とは

注目する事象(ことがら)が実現すると期待される割合のこと。

⟶より数学的に表すために、以下で準備する。

事象について

全事象 Ω : 実現可能なすべてを集めた事象。

空事象 ϕ : 実現しえない事象。

和事象 $A \cup B$: 事象A, Bの少なくとも一方が起る事象。

積事象 $A \cap B$: 事象A, Bの両方が起る事象。

余事象 A^c : Aが起こらない事象。

例. サイコロ投げを考えると、全事象 Ω は

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ とできる。

事象 A, B, C をそれぞれ

$A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{4, 5, 6\}$, $C = \{1, 2\}$ とすると、

$A \cup B$, $A \cap B$, A^c, $B \cap C$ はそれぞれ

$A \cup B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{5\}$, $A^c = \{2, 4, 6\}$, $B \cap C = \phi$ である。

問題. 上の例で $A \cup C$, $A \cap C$, B^c, $B^c \cap C^c$ を求めよ。

答. $A \cup C = \{1, 2, 3, 5\}$, $A \cap C = \{1\}$, $B^c = \{1, 2, 3\}$, $B^c \cap C^c = \phi$ である。

例. 任意の事象 A に対し、

$A \cup A^c = \Omega$, $A \cap A^c = \phi$ が成り立つ。

2つの事象の一方が起これば、他方が起こらないとき、
それらの事象は互いに排反であるという。

定理 1.1.1.

事象 A, B が互いに排反であれば、
$A \cap B = \phi$ である。この逆も成り立つ。

例. サイコロ投げの例で、B と C は排反である。

確率の基本的性質.

事象 A に対し、$P(A)$ で A が起こる確率を表す。

I. 任意の事象 A に対し　$0 \leqq P(A) \leqq 1$.

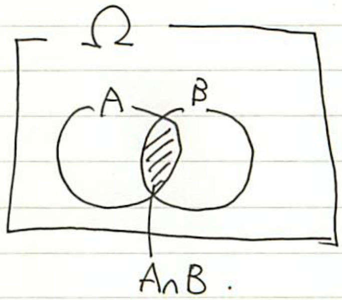
II. $P(\Omega) = 1$, $P(\phi) = 0$

III. 事象 A, B が互いに排反であるとき、

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

確率の加法定理：事象 A, B に対し.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$



$\because$ $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^c)$

$P(A \cup B) = P(B) + P(A \cap B^c)$

よりわかる

問題. 52枚のトランプから1枚ひくとき.

事象A：スペードをひく，事象B：絵札(J,Q,K)をひく

とするとき、以下の確率を求めよ.

(1) $P(A)$ (2) $P(B)$ (3) $P(A \cap B)$ (4) $P(A \cup B)$

答 (1) $\frac{1}{4}$ (2) $\frac{3}{13}$ (3) $\frac{3}{52}$ (4) $\frac{13+12-3}{52} = \frac{22}{52} = \frac{11}{26}$

事象の独立性.

・2つの事象の出方が互いに影響を与えあわないとき、それらは互いに独立であるという.

・A,B 2つの事象に対し．仮にAが起こったときにBが起こる確率を

$P(B|A)$ と書き、条件AのもとでBが起る条件付き確率という.

・AとBが互いに独立なら. $P(B|A) = P(B)$ である.逆も成り立つ.

例. 3本のあたりが入った. 10本のくじから1本をひく.

先にXさんがひき，次にYさんがひくとき.

事象A：Xさんがあたりをひく，事象B：Yさんがあたりをひく. とする

(1) Xさんが引いたくじを戻すとき， AとBは互いに独立である

(2) Xさんが引いたくじを戻さないとき，AとBは互いに独立ではない.

(3) (2)の場合 $P(B|A) = \frac{2}{9}$ である

問題. (1) 白玉5個，赤玉10個入った袋から.XさんとYさんが順に1個ずつとる.

事象A：Xさんが白玉をとる, 事象B：Yさんが白玉をとる. とするとき.

$P(B|A)$，$P(B|A^c)$，$P(B^c|A)$，$P(B^c|A^c)$ を求めよ

(2) トランプから Xさんと Yさんが 1枚ずつひく.

事象 A_1 : Xさんがハートをひく　事象 B_1 : Yさんがスペードをひく

事象 A_2 : Xさんが K をひく　事象 B_2 : Yさんが J をひく.

この中で. 互いに独立な事象を全て挙げよ.

答 (1) $P(B|A) = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$　$P(B|A^c) = \frac{5}{14}$

$P(B^c|A) = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$　$P(B^c|A^c) = \frac{9}{14}$

(2) A_1とA_2, A_1とB_2, B_1とA_2, B_1とB_2.

解説. A_1とA_2について考える. 互いに独立であるためには $P(A_1|A_2) = P(A_1)$

ならよいので. それぞれ計算すると.

$P(A_1) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$, $P(A_1|A_2) = \frac{1}{4}$　Kが4枚あり. ハートはそのうちの1枚だけなので.

となる. これより. A_1とA_2は互いに独立.

一般に次の定理が成り立つ.

定理 1.2.1. 乗法定理 : $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$

定理 1.2.2. AとBが互いに独立なら. $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

問題. (1) コイントスを5回するとき. すべて表の確率を求めよ.

(2). 両面が赤のカード. 片面が赤でもう片面が白のカードの2枚が袋に入っている.

この袋から1枚取り出して. 見えている面が赤のとき,

その裏面が白である確率を求めよ.

答 (1) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$　(2). $\frac{1}{3}$. (全ての面に番号をつけるとわかりやすい)