命題 4.12

$\{\varphi_n\}_{n=1}^N \subset H$ を ONS とするとき. $M = \mathrm{span}\{\varphi_n\}_{n=1}^N$ は closed subsp.であり,
$x \in H$ に対し. $x = y + z$ $(y \in M, z \in M^\perp)$ とすると
$y = \sum_{n=1}^N \langle \varphi_n, x \rangle \varphi_n$ となる.

☺ まず. M が closed であることを示そう.
$M \subset M^{\perp\perp}$ は前の系でやったので. $M^{\perp\perp} \subset M$ を示す.
もし. $M^{\perp\perp} \ni \psi$, $M \not\ni \psi$ となるベクトルがあったとすると.
グラム・シュミットの直交化法から. ψ は $\{\varphi_n\}$ と直交するとしてよい.
これより $\psi \in M^\perp$ となり. これは $\psi \in M^{\perp\perp}$ に矛盾.
∴このようなベクトルは存在せず. $M^{\perp\perp} \subset M$ がわかる. ∴Mは closed.

次に. $y = \sum_{n=1}^N \alpha_n \varphi_n$ とおくと.
$\langle \varphi_n, x \rangle = \langle \varphi_n, y+z \rangle = \langle \varphi_n, y \rangle + \langle \varphi_n, z \rangle = \alpha_n$.
より $y = \sum_{n=1}^N \langle \varphi_n, x \rangle \varphi_n$ がわかる.

§5. ヒルベルト空間のテンソル積

V, W を vector sp. とし．（V, W とも有限次元とする）

$V \times W = \{(x, y) \mid x \in V,\ y \in W\}$ を考える．

Def 5.1．$F : V \times W \longrightarrow \mathbb{C}$ が次の3つをみたすとき．F を

$(x, y) \longmapsto F(x, y)$ 共役双線形汎関数といい．

そのような F 全体を $L(V \times W)$ とかく．

条件：$x_1, x_2 \in V$，$y_1, y_2 \in W$，$\alpha \in \mathbb{C}$ に対し．

(i) $F(x_1 + x_2, y_1) = F(x_1, y_1) + F(x_2, y_1)$

(ii) $F(x_1, y_1 + y_2) = F(x_1, y_1) + F(x_1, y_2)$

(iii) $F(\alpha x_1, y_1) = F(x_1, \alpha y_1) = \bar{\alpha} F(x_1, y_1)$

例．$\dim V = m$，$\dim W = n$ とし．$\{v_i\}_{i=1}^{m}$，$\{w_j\}_{j=1}^{n}$ を bases とすれば

$v = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i \in V$，$w = \sum_{j=1}^{n} \beta_j w_j \in W$ とかける

ここで．$A = (A_{ij})$ を $m \times n$ 行列とし．

$F_A := \sum_{i=1}^{m} \cdot \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \cdot \overline{\alpha_i} \cdot \overline{\beta_j}$ で F_A を定義すると．$F_A \in L(V \times W)$ である．

例．ヒルベルト空間 H_1, H_2 をとり．$\varphi \in H_1$，$\psi \in H_2$ とする．

$\varphi \otimes \psi : H_1 \times H_2 \longrightarrow \mathbb{C}$ とおけば．

$(x, y) \longmapsto \langle x, \varphi \rangle \cdot \langle y, \psi \rangle$

$\varphi \otimes \psi \in L(H_1 \times H_2)$ がわかる．