

応用数学II 演習問題・総まとめ

1. 周期 2π をもち、区間 $(-\pi, \pi]$ において次の式で与えられる関数のフーリエ級数を求めよ.

$$(1) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(-\pi - x) & (-\pi < x \leq 0) \\ \frac{1}{2}(\pi - x) & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \pi - |x|$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x \leq 0) \\ 2 \cos x & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$$

$$(4) f(x) = x$$

$$(5) f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x \leq 0) \\ 1 & (0 < x \leq \pi) \end{cases}$$

2. 次の関数の複素形フーリエ級数を求めよ.

$$(1) f(x) = e^x \quad (-\pi < x \leq \pi)$$

$$(2) f(x) = x \quad (-\pi < x \leq \pi)$$

$$(3) f(x) = \sin^3 x \quad (-\pi < x \leq \pi)$$

3. 周期 $2l$ ($l > 0$ では周期 2) をもち、区間 $(-l, l]$ において次の式で与えられる関数のフーリエ級数を求めよ.

$$(1) f(x) = |x| \quad (-l < x \leq l)$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} -1 & (-l < x \leq 0) \\ 1 & (0 < x \leq l) \end{cases}$$

$$(3) f(x) = x \quad (-l < x \leq l)$$

4. 関数 $f(x) = x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx \quad (-\pi < x \leq \pi)$ にパーセバルの等式を

使って $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ を求めよ.

5. 上の問題の式と項別微分を使い $g(x) = x$ のフーリエ級数を求めよ.

6. 次の関数のフーリエ積分を求めよ. ただし $a > 0$ とする.

$$(1) f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq a) \\ -1 & (-a \leq x < 0) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq a) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

7. 次の関数のフーリエ変換を求めよ. ただし $a > 0$ とする.

$$(1) f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq a) \\ -1 & (-a \leq x < 0) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$(2) f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq a) \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

$$(3) f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

8. 次の関数のフーリエ余弦変換を求めよ. ただし $a > 0$ とする.

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{a} & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$

9. 次の関数のフーリエ正弦変換を求めよ. ただし $a > 0$ とする.

$$f(x) = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (x > a) \end{cases}$$

10. 次のベクトルの外積を求めよ.

$$(1) a = (3, 5, -1), b = (2, -1, 3)$$

$$(2) a = (4, -2, 7), b = (5, -3, -2)$$

11. 次の3つのベクトルを3辺とする平行六面体の体積を求めよ.

$$(1) a = (1, 3, 2), b = (1, -1, -2), c = (-1, 3, 1)$$

$$(2) a = (1, -3, 1), b = (2, 3, 1), c = (-1, 1, -1)$$

12. ベクトル関数 $a(t) = (\cos t, \sin t, t)$ について, $a'(t), |a'(t)|, a''(t), |a''(t)|$ をそれぞれ求めよ.

13. ベクトル関数 $a(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $b(t) = (t, -t^2, t^3)$ について, $(a \cdot b)', (a \times b)'$ をそれぞれ求めよ.

14. 次のベクトル関数 $v(t)$ についての微分方程式を解け. ただし, c は定ベクトル, $P(t)$ は関数, $Q(t)$ はベクトル関数とする.

$$(1) v'(t) = c$$

$$(2) v'(t) + v(t) \cdot \tan t = (\cos t, 0, 0)$$

$$(3) v'(t) + P(t) \cdot v(t) = Q(t)$$

15. 次の曲線の $t = 0$ から $t = t$ までの弧長 s と単位接線ベクトル \mathbf{t} を媒介変数 t を用いて表せ.

$$(1) r(t) = (2t^3, 3t, 3t^2)$$

$$(2) r(t) = (e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t)$$

$$(3) r(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$$

16. 次の曲線の単位接線ベクトル \mathbf{t} , 単位主法線ベクトル \mathbf{n} , 単位従法線ベクトル \mathbf{b} , 曲率 κ , 捩率 τ をそれぞれ求めよ. (弧長媒介変数 s を用いて表せ.)

$$(1) r(t) = (1 - \sin t, 1 - \cos t, t)$$

$$(2) r(t) = (a \sin t, a \cos t, bt)$$

17. 次のスカラー場の勾配を求めよ.

$$(1) f(x, y, z) = xyz \quad (2) f(x, y, z) = \frac{x}{y} \quad (3) f(t) = e^{x^2+y^2+z^2}$$

18. スカラー場 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ の等位面 $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ 上の点 $P(1, 1, 1)$ において、この等位面と垂直な単位ベクトル n を一つ求めよ.

19. 次のベクトル場 $a(x, y, z)$ が渦なしであることを示せ.

(1) $a(t) = (x^2 + yz, y^2 + zx, z^2 + xy)$

(2) $a(t) = (2xy^2 - 2xz^2, 2x^2y - z^3, -2x^2z - 3yz^2)$

20. 次のスカラー場の $C : r(t)$ 上の線積分を求めよ.

(1) $f(x, y, z) = xyz, \quad r(t) = (t, t^2, t^3) \quad (0 \leq t \leq 1)$

(2) $f(x, y, z) = x + 2yz, \quad r(t) = (t, t, t) \quad (0 \leq t \leq 1)$

21. 次のベクトル場の $C : r(t)$ 上の線積分を求めよ.

(1) $a(x, y, z) = (-y, x, z), \quad r(t) = (\cos t, \sin t, t) \quad (0 \leq t \leq \pi)$

(2) $a(x, y, z) = (2xyz, x^2z, x^2y), \quad r(t) = (t, t^2, t^3) \quad (0 \leq t \leq 1)$