期末試験 解答

1. フーリエ係数を計算すると.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot \cos nx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (2x+3)\cos nx \, dx$$ より

$n=0$ のとき

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x+3 \, dx = \frac{1}{\pi}\left[x^2+3x\right]_{-\pi}^{\pi} = 6\pi$$

$n \neq 0$ のとき

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}(2x+3)\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\sin nx \, dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (2x+3)\sin nx \, dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}(2x+3)\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2\cos nx \, dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi}\left((2\pi+3)(-1)^n - (-2\pi+3)(-1)^n\right) + \frac{1}{n\pi}\left[\frac{2}{n}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{4\pi}{n\pi}(-1)^{n+1} = \frac{4}{n}(-1)^{n+1}$$ となる

これより フーリエ級数は

$$f(x) \sim 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n}(-1)^{n+1}\cdot \sin nx$$ である.

2. フーリエ係数を求めると. $f(x)$ は偶関数より $b_n = 0$ である.

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{\pi n}{l}x \, dx = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} x\cos\frac{\pi n}{l}x \, dx$$ より

$n=0$ のとき

$$a_0 = \frac{2}{l}\int_0^l x \, dx = \frac{2}{l}\cdot\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^l = l$$

No.

$n \neq 0$ のとき

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l x\cos\frac{\pi n}{l}x\,dx = \frac{2}{l}\left[\frac{l}{\pi n}x\sin\frac{\pi n}{l}x\right]_0^l - \frac{2}{\pi n}\int_0^l \sin\frac{\pi n}{l}x\,dx$$

$$= -\frac{2}{\pi n}\left[\frac{-l}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{l}x\right]_0^l = \frac{2l}{(\pi n)^2}\left((-1)^n - 1\right)$$

$$\therefore f(x) \sim \frac{l}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2l}{(\pi n)^2}\left((-1)^n-1\right)\cdot\cos\frac{n\pi}{l}x$$ である.

3. $$F(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\tau x}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0} e^{(3-i\tau)x}dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\infty} e^{(-3-i\tau)x}dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{3-i\tau}e^{(3-i\tau)x}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\frac{1}{-3-i\tau}e^{(-3-i\tau)x}\right]_0^{\infty}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{3-i\tau} + \frac{1}{3+i\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{6}{9+\tau^2}\right) = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}(9+\tau^2)}$$

4. $e^{in\pi} = \cos n\pi + i\sin n\pi = (-1)^n$ である

5. $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2$ より 体積は 2.

6. $$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}f, \frac{\partial}{\partial y}f, \frac{\partial}{\partial z}f\right)$$

$$= \left(2x e^{x^2+y^2+z^2}, 2y e^{x^2+y^2+z^2}, 2z e^{x^2+y^2+z^2}\right)$$ である.

7. $\dot{r}(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$

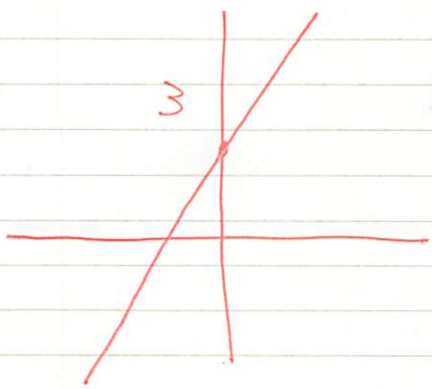
$a(r(t)) = (-\sin t, \cos t, t^2)$ より

$$\int_C a(r(t)) \cdot \dot{r}(t)\, dt = \int_0^{\pi} \sin^2 t + \cos^2 t + t^2\, dt = \left[t + \frac{1}{3}t^3\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{\pi^3}{3} + \pi$$ である．

注意！

① $f(x) = 2x + 3$ は奇関数ではありません！



← 原点対称にならない

② $|x|$ の入っている積分は
正のとこと 負のとこの場合わけです！

③ フーリエ変換の定義は
きちんと覚えましょう！