一般区間におけるフーリエ級数

周期$2l$の関数$f(x)$のフーリエ級数を考えたい.

区間$[-l, l]$ → 区間$[-\pi, \pi]$と縮める(広げる)には.

$\xi = \frac{\pi}{l} x \quad \left(x = \frac{l}{\pi} \xi \right)$ とすればよい. 実際.

$g(\xi) = f\left(\frac{l}{\pi} \xi \right)$ とおけば. $g(0) = f(0)$, $g(2\pi) = f(2l)$ のようになり.

$g(\xi)$は周期2πの関数になる.

ここで, $g(\xi)$のフーリエ級数は.

$$g(\xi) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos n\xi + b_n \cdot \sin n\xi)$$ となる.

求めたいのは$f(x)$のフーリエ級数なので, $\xi = \frac{\pi}{l} x$を代入すると.

$$f(x) = g\left(\frac{\pi}{l} \cdot x \right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{\pi n}{l} \xi + b_n \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right)$$

となる. ここで, a_nとb_nは. $d\xi = \frac{\pi}{l} \cdot dx$を使うと.

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\xi) \cdot \cos n\xi \cdot d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos \frac{\pi n}{l} x \cdot \frac{\pi}{l} dx$$

$$= \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{\pi n}{l} x \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\xi) \cdot \sin n\xi \cdot d\xi = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x \cdot dx$$ となる.

<u>定理3.1</u>. 周期$2l$をもつ関数$f(x)$のフーリエ級数は

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{\pi n}{l} \xi + b_n \cdot \sin \frac{\pi n}{l} \xi \right)$$ である. フーリエ係数は

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \cos \frac{\pi n}{l} x \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cdot \sin \frac{\pi n}{l} x \, dx$$ となる

例1. 周期2ℓの関数$f(x)$のフーリエ級数を求めよ.

$$f(x)=|x| \qquad (-\ell<x\leqq \ell)$$

答. $f(x)$は偶関数より. $b_n=0$.

$$a_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cdot\cos\frac{\pi n}{\ell}x\,dx=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} x\cdot\cos\frac{\pi n}{\ell}x\,dx.$$

ここで $n=0$ のとき

$$a_0=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell} x\,dx=\ell$$

$n\neq 0$ のとき

$$a_n=\frac{2}{\ell}\left[\frac{\ell}{\pi n}x\cdot\sin\frac{\pi n}{\ell}x\right]_0^{\ell}-\frac{2}{\pi n}\int_0^{\ell}\sin\frac{\pi n}{\ell}x\,dx$$

$$=-\frac{2}{\pi n}\cdot\left[-\frac{\ell}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{\ell}x\right]_0^{\ell}=\frac{2\ell}{(\pi n)^2}\left((-1)^n-1\right)$$ となる.

$$\therefore f(x)\sim\frac{\ell}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\ell}{(\pi n)^2}\left((-1)^n-1\right)\cos\frac{\pi n}{\ell}x$$ である.

問題 次の周期2ℓ（(2)は2）の関数のフーリエ級数を求めよ.

(1) $$f(x)=\begin{cases}-1 & (-\ell<x<0)\\ 1 & (0\leqq x\leqq \ell)\end{cases}$$

(2) $$f(x)=x \qquad (-1<x\leqq x)$$

答(1). $f(x)$は奇関数より $a_n=0$.

$$b_n=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cdot\sin\frac{\pi n}{\ell}x\,dx=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}\sin\frac{\pi n}{\ell}x\,dx$$

$$=\frac{2}{\ell}\cdot\left[-\frac{\ell}{\pi n}\cos\frac{\pi n}{\ell}x\right]_0^{\ell}=-\frac{2}{\pi n}\left((-1)^n-1\right)$$

$$=\frac{2}{\pi n}\left(1-(-1)^n\right)$$

$\therefore\ f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}(1-(-1)^n) \sin \frac{\pi n}{l} x$

(2). $f(x)$は奇関数より. $a_n = 0$.

$b_n = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot \sin \pi n x \, dx = 2 \cdot \int_0^1 x \cdot \sin \pi n \cdot x \, dx$

$= 2 \cdot \left[-\frac{1}{\pi n} x \cdot \cos \pi n \cdot x \right]_0^1 + \frac{2}{\pi n} \int_0^1 \cos \pi n x \, dx$

$= -\frac{2}{\pi n}(-1)^n + \frac{2}{\pi n} \cdot \left[\frac{1}{\pi n} \sin \pi n x \right]_0^1$

$= \frac{2}{\pi n}(-1)^{n-1}$

$\therefore\ f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi n}(-1)^{n-1} \sin \pi n x$ である