複素形フーリエ級数

e^x をマクローリン展開すると、

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$$ となる。

一方、$\sin x$ と $\cos x$ はそれぞれ、

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots$$ であった。

ここで、e^{ix} を考えると、

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1 + ix + \frac{1}{2!}(ix)^2 + \frac{1}{3!}(ix)^3 + \cdots \\ &= 1 + ix - \frac{1}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}i\cdot x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}i\cdot x^5 - \cdots \\ &= \cos x + i\cdot\sin x \end{aligned}$$

とできている。同様に

$$e^{-ix} = \cos(-x) + i\cdot\sin(-x) = \cos x - i\sin x$$

となる。逆に、これらの式から、

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

とできる。これを使うと、

$$\begin{aligned} &a_n\cdot\cos nx + b_n\cdot\sin nx \\ &= a_n\cdot\frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + b_n\cdot\frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \\ &= \frac{a_n - ib_n}{2}e^{inx} + \frac{a_n + ib_n}{2}e^{-inx} \end{aligned}$$

とできる。ここで、

$c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$, $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$ とおけば、フーリエ級数は.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos x + b_n \cdot \sin x)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{inx}$$

と表される. ここで、係数 c_n は

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\left(\frac{\cos nx - i\cdot\sin nx}{2}\right)dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-inx}dx$$ である.

$c_{-n} = \overline{c_n}$ より. この式は n が負でも成立つ. まとめると.

定理2.2. 周期 2π の関数 $f(x)$ は.

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \cdot e^{inx}.$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot e^{-inx}\cdot dx$$ の形で表される.

これを $f(x)$ の複素形フーリエ級数といい、c_n を複素形フーリエ係数という.

これまでのフーリエ級数は実数形という.

よく使う公式 : $\int e^{ax}\cdot dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$ は a が複素数でも使える.

$$e^{in\pi} = e^{-in\pi} = (-1)^n.$$

$$(\because\ e^{in\pi} = \cos n\pi + i\cdot\sin n\pi = (-1)^n)$$

例. $f(x) = e^x$ $(-\pi < x \leqq \pi)$ の複素形フーリエ級数を求めよ.

答. $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\cdot e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{1-in}e^{(1-in)x}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi(1-in)}\left(e^{\pi-in\pi} - e^{-\pi+in\pi}\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi(1-in)}\left(e^{\pi}\cdot e^{-in\pi} - e^{-\pi}\cdot e^{in\pi}\right)$$

$$= \frac{(-1)^n}{2\pi(1-in)}\left(e^{\pi} - e^{-\pi}\right)$$ である．これより

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2\pi(1-in)}(e^{\pi}-e^{-\pi})\cdot e^{inx}$$ である

問題．次の関数の複素形フーリエ級数を求めよ．

(1) $f(x) = x \quad (-\pi < x \leqq \pi)$

(2) $f(x) = \sin^3 x \quad (-\pi < x \leqq \pi)$

答．(1) $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x \cdot e^{-inx}\,dx$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\left[\frac{1}{-in}x\cdot e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi in}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-inx}\,dx$$

$$= \frac{-1}{2\pi in}\cdot\left(\pi\cdot(-1)^n + \pi(-1)^n\right) + \frac{1}{2\pi in}\left[\frac{1}{-in}e^{-inx}\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \frac{(-1)^{n-1}}{in} = \frac{(-1)^n i}{n}$$ となる $(n \neq 0)$．

$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0$ より．

$$f(x) \sim \sum_{n\neq 0} \frac{(-1)^n i}{n} e^{inx}$$ となる

(2) $\sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \frac{-1}{8i}\cdot\left(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}\right)$

とできる．