波動方程式.

長さπの弦の振動を $u(x,t)$ で表すと. これは2階の偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ をみたす. これを波動方程式という.

ただし. $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq t$ とする. また. 初期条件と境界条件を.

$$u(x,0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$ とする.

この解をフーリエ級数を使って解いてみる.

補題. $y''(x) + k y(x) = 0 \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$

$y(0) = y(\pi) = 0$ が 0でない解をもつ必要十分条件は.

$k = n^2 \quad (n = 1, 2, \cdots)$ とできることである. このとき. この解は

$y = A \sin nx$ (Aは任意定数) となる.

(∵) 方程式をラプラス変換すれば. $y'(0) = A$ として.

$s^2 Y(s) - A + kY(s) = 0$ より

$$Y(s) = \frac{A}{s^2 + k}$$ となる. よって.

$k = 0$ のとき $y(x) = At$

$k > 0$ のとき $y(x) = \frac{A}{\sqrt{k}} \cdot \sin \sqrt{k} x$.

$k < 0$ のとき $y(x) = \frac{A}{2\sqrt{-k}} \left(e^{\sqrt{-k}x} - e^{-\sqrt{-k}x} \right)$ となるが.

$y(\pi) = 0$ より. $k = 0$ と $k < 0$ のときは不適.

$k > 0$ のとき $y(\pi) = 0$ になるには. $\sqrt{k}$ が自然数でないといけないので.

$k = n^2$ となる. //

今. $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$ とできたとして. この解を求めてみよう.

(このような解を変数分離解という)

$\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)=X''(x)\cdot T(t)$, $\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t)=X(x)\cdot T''(t)$ より

これを元の式に代入すると.

$X(x)\cdot T''(t)=c^2\cdot X''(x)\cdot T(t)$

$\dfrac{X''(x)}{X(x)}=\dfrac{T''(t)}{c^2\cdot T(t)}=-k$ とできる (kは定数)

左は x だけの式, 右は t だけの式なので. イコールになるには定数でないといけない.

これより $X''(x)+kX(x)=0$, $T''(t)+kc^2T(t)=0$ となる.

$X(x)$ には境界条件 $X(0)=X(\pi)=0$ があるので. 補題を使うと.

$k=n^2$ とできている. さらに $X(x)=\sin nx$ である.

$T''(t)+n^2c^2T(t)=0$ の解は ラプラス変換か. 記号解法を使って.

$T(t)=C_n\cos nct+D_n\sin nct$ とできる. これより

$u_n(x,t)=X(t)\cdot T(t)=\sin nx\,(C_n\cdot\cos nct+D_n\sin nct)$ となる.

これはもとの方程式の解になるが, 実は

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{N}a_n u_n(x,t)$ も解になる

$\because$ $c^2\dfrac{\partial}{\partial x^2}u(x,t)=\sum_{n=1}^{N}a_n\cdot\dfrac{c^2\partial}{\partial x^2}u_n(x,t)$

$\dfrac{\partial}{\partial t^2}u(x,t)=\sum_{n=1}^{N}a_n\cdot\dfrac{\partial}{\partial t^2}u_n(x,t)$

と u_n が解であることからわかる.

$N \to \infty$ として.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot u_n(x,t)$$ も解となる.

以下このような u で.初期条件をみたすものをさがす(a_n, C_n, D_nを決める)

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \,(C_n \cdot \cos nct + D_n \sin nct)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin nx \cdot (-nc \cdot C_n \sin nct + nc \cdot D_n \cos nct)$$ より.

$$f(x) = u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin nx$$

$$g(x) = \frac{\partial}{\partial t} u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} nc \cdot D_n \sin nx$$ となる.

これらの式を.$f(x)$ $g(x)$ の正弦級数と思えば.C_n, ncD_n が決定する

すなわち.
$$C_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(\xi) \sin n\xi \, d\xi$$

$$nc \cdot D_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(\xi) \sin n\xi \, d\xi$$ である.

例. 波動方程式を $f(x)=0$, $g(x)=\sin x$ の初期条件で解け.

答. まず. $C_n = 0$ である.

D_n は $n \geqq 2$ のとき $D_n = 0$ $n=1$ のとき.

$$c \cdot D_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 \xi \, d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1-\cos 2\xi}{2} d\xi = 1. \quad \therefore D_1 = \frac{1}{c}$$

これより. $u(x,t) = \frac{1}{c} \cdot \sin x \cdot \sin ct$ となる.

問. 波動方程式を以下の初期条件で解け

(1) $u(x,0)=\sin x$, $u_t(x,0)=0$

(2) $u(x,0)=0$, $u_t(x,0)=\begin{cases} x & 0\leqq x\leqq \frac{\pi}{2} \\ \pi-x & \frac{\pi}{2}\leqq x\leqq \pi \end{cases}$

答. (1) まず. $D_n=0$ である. C_n は $n\geqq 2$ のとき $C_n=0$. $n=1$ のとき

$C_1=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin^2\xi\, d\xi = 1$ より $u(x,t) = \sin x\cdot\sin ct$ である

(2) まず. $C_n=0$ である.

$$ncD_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi g(\xi)\cdot\sin n\xi\, d\xi$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\xi\cdot\sin n\xi\, d\xi+\frac{2}{\pi}\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}(\pi-\xi)\cdot\sin n\xi\, d\xi$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\left[-\frac{1}{n}\xi\cos n\xi\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}+\frac{1}{n}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos n\xi\, d\xi+\left[-\frac{1}{n}(\pi-\xi)\cos n\xi\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}-\frac{1}{n}\int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}\cos n\xi\, d\xi\right)$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\left[\sin n\xi\right]_0^{\frac{1}{2}\pi}+\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}-\frac{1}{n^2}\left[\sin n\xi\right]_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi}\right)$$

$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{n^2}\cdot\sin\frac{n\pi}{2}$ より $D_n=\frac{4}{\pi cn^3}\cdot\sin\frac{n\pi}{2}$ となり

$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{\pi cn^3}\sin\frac{n\pi}{2}\cdot\sin nx\cdot\sin ncx$ となる