∇ を $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ のようにベクトルみたいに表すことにする.

定義. ベクトル場 $a = (a_1, a_2, a_3)$ に対し.

$\nabla \cdot a = \frac{\partial}{\partial x}a_1 + \frac{\partial}{\partial y}a_2 + \frac{\partial}{\partial z}a_3$ を a の発散

$\nabla \times a = \left(\frac{\partial}{\partial y}a_3 - \frac{\partial}{\partial z}a_2, \frac{\partial}{\partial z}a_1 - \frac{\partial}{\partial x}a_3, \frac{\partial}{\partial x}a_2 - \frac{\partial}{\partial y}a_1\right)$ を a の回転という.

ベクトル場を.例えば水の流れと考えると. $\frac{\partial}{\partial x}a_1$ は x 軸方向に流入.or流出する水の量と考えられる. これより. $\nabla \cdot a = 0$ のとき. a は湧き出しなしという

また $\frac{\partial}{\partial y}a_3$ は x 軸を軸としたときに. y 方向に受ける力で.

$\frac{\partial}{\partial z}a_2$ は 〃 z 方向に受ける力となる

これより $\nabla \times a = 0$ のとき. a は渦なし という.

a に対し. $-\nabla f = a$ となる スカラー場 f を a の ポテンシャル という.

例. $a = (2xy^2 - 2xz^2, 2x^2y - z^3, -2x^2z - 3yz^2)$ が渦なしであることを示せ

答 $\nabla \times a = (-3z^2 - (-3z^2), -4xz - (-4xz), 4xy - 4xy) = 0$ である

問 (1) $a = (x^2 + yz, y^2 + zx, z^2 + xy)$ が渦なしであることを示せ

(2) $a = (\sin y, x\cos y - z\sin y, \cos y)$ について. $\nabla \cdot a$ と $\nabla \times a$ を求めよ

答 (1) $\nabla \times a = (x - x, y - y, z - z) = 0$ である

(2) $\nabla \times a = (-\sin y - (-\sin y), 0 - 0, \cos y - \cos y) = 0$

$\nabla \cdot a = 0 - x\sin y - z\cos y + 0 = -x\sin y - z\cos y$ となる.