スカラー場とベクトル場

空間内の領域 D の各点 P に対し、実数値 $f(p)$ が対応するとき、

関数 f を D 上で定義されたスカラー場という。$P=(x,y,z)$ のとき、

$f(p)=f(x,y,z)$ とも書く。

例として、温度、気圧、電位の分布がある。

各点 P に対し、ベクトル $a(p)$ が対応するとき、a を D で定義された

ベクトル場といい、

$a(p)=a(x,y,z)=(a_1(x,y,z), a_2(x,y,z), a_3(x,y,z))$ と書く。

例として、重力場・磁場・流体内の速度がある。

スカラー場の勾配ベクトル

以下、スカラー場・ベクトル場は何回でも微分可能であるとする。

スカラー場 $f(x,y,z)$ に対し、

$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$ で与えられるベクトル場を

勾配ベクトルまたは勾配という。

f が何回でも偏微分可能なので、f は全微分も可能で、

$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz$ とできる

f の増加量は、x, y, z の増加量に偏微分の値をかけたものになる。

点 $P(x,y,z)$ を始点とする単位ベクトル $l=(l_1, l_2, l_3)$ をとり、

P を通り方向ベクトル l をもつ直線上の点の座標は $(x+l_1t, y+l_2t, z+l_3t)$

である。スカラー場 f について、

$$\frac{d}{dt} f(x+l_1 t,\ y+l_2 t,\ z+l_3 t)$$ ← l方向に移動すると、fがどれだけ増えるかを表している。

をfの点Pにおけるl方向の微分係数といい、$\frac{\partial f}{\partial l}$ で表す。

さきほどの全微分を考えれば、

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot l_1 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot l_2 + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot l_3 = l\cdot\nabla f$$ となるので、

これは ∇f の l方向への成分である。

一方、点Pにおけるlと∇fのなす角をθとすれば、

$$\frac{\partial f}{\partial l} = l\cdot\nabla f = |\nabla f|\cdot|l|\cdot\cos\theta = |\nabla f|\cdot\cos\theta$$ となるので、

$\theta = 0$ のとき $\frac{\partial f}{\partial l}$ は最大になり、その値は $|\nabla f|$ になる。まとめると、

定理4.2. 点Pにおけるスカラー場fの勾配∇fは、点Pにおける方向微分係数 $\frac{\partial f}{\partial l}$ が最大になるような単位ベクトルlと同じ方向で、大きさは $\frac{\partial f}{\partial l}$ の最大値に等しい。

例. $f(x,y,z) = x-2+y^2+z^2$ の勾配を求めよ。

答. $\nabla f = (1, 2y, 2z)$ である

問題. 次のスカラー場の勾配を求めよ

(1) $f(x,y,z) = xyz$ (2) $f(x,y,z) = \frac{x}{y}$

(3) $f(x,y,z) = e^{x^2+y^2+z^2}$

答 (1) $\nabla f = (yz, xz, xy)$

(2) $\nabla f = \left(\frac{1}{y}, -\frac{x}{y^2}, 0\right)$

(3) $\nabla f = \left(2x\cdot e^{x^2+y^2+z^2}, 2y\cdot e^{x^2+y^2+z^2}, 2z\cdot e^{x^2+y^2+z^2}\right)$