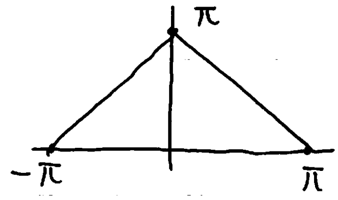
応用数学Ⅱ － フーリエ解析

フーリエ級数

フーリエ級数は，関数を三角関数の和で表したものである．例えば．

$f(x)=\pi-|x|$　（右のグラフ）



という関数は．

$$f(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\left(\cos x+\frac{1}{3^2}\cos 3x+\frac{1}{5^2}\cos 5x\cdots\right)$$

という形で表すことができる

→ フーリエ級数は関数を波の形に分解している．

準備：講義でよく使う公式・性質　（n, mは自然数）

① $[-a,a]$上で定義された関数 $f(x)$ が

偶関数 $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\cdot\int_0^a f(x)\cdot dx$

奇関数 $\Rightarrow \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

② $\int_{-\pi}^{\pi} 1\cdot dx = 2\pi$

③ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx = 0$

④ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot\cos nx\,dx = \begin{cases}\pi & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}$

⑤ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx\cdot\sin nx\,dx = \begin{cases}\pi & (m=n)\\ 0 & (m\neq n)\end{cases}$

⑥ $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot\sin nx\,dx = 0$．

⑦ (偶関数)×(偶関数)，(奇関数)×(奇関数) は偶関数．

(偶関数)×(奇関数) は奇関数．

④の証明. $\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$ より.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\cdot\cos nx\cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(\cos(m+n)x+\cos(m-n)x)dx$$

$$= \begin{cases} \pi & (m=n) \\ 0 & (m\neq n) \end{cases}$$

②と③より
積分が0にならないのは
$\cos(m-n)x=1$ のときだけ.

<u>問題</u>. ②, ③, ⑤, ⑥ を証明せよ.

<u>答</u> ②: $\int_{-\pi}^{\pi} 1\ dx = [x]_{-\pi}^{\pi} = 2\pi$

③: $\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cdot dx = \left[\frac{1}{n}\cdot\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$

$\sin nx$ は奇関数なので. $\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cdot dx = 0$.

⑤: $\sin\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$ より

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin nx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right)dx$$

$$= \begin{cases} \pi & (m=n) \\ 0 & (m\neq n) \end{cases} \quad (④のときと同じ理由)$$

⑥: $\cos\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta))$ と $\sin$ が奇関数なので.

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\sin nx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}(\sin(m+n)x-\sin(m-n)x)dx = 0.$$

<u>フーリエ級数とフーリエ係数</u>

関数 $f(x)$ が 周期 2π であるとする. すなわち $f(x)=f(x+2\pi)$ である.

さらに. $f(x)$ が三角関数の級数で表されていたとする. すなわち.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx + b_n\cdot\sin nx)$$

となっていたとする.

この係数である a_n, b_n を求めるには、次の計算をすればよい。

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx + b_n\cdot\sin nx)\, dx = \pi\cdot a_0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos mx\cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\cdot\cos mx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx\cdot\cos mx + b_n\cdot\sin nx\cdot\cos mx)\, dx$$

$$= a_m\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\cos mx\cdot\cos mx\cdot dx = \pi\cdot a_m.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin mx\cdot dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0}{2}\sin mx + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx\cdot\sin mx + b_n\cdot\sin nx\cdot\sin m\cdot x)\, dx$$

$$= b_m\cdot\int_{-\pi}^{\pi}\sin mx\cdot\sin mx\cdot dx = \pi\cdot b_m.$$

これらから フーリエ級数を定義する

定義 1.1 周期 2π の関数 $f(x)$ について。

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\cdot dx \qquad (n=0,1,2,\cdots)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\cdot dx \qquad (n=1,2,\cdots)$$ とし。

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot\cos nx + b_n\cdot\sin nx)$$

を $f(x)$ の フーリエ級数 または フーリエ展開 といい。

その係数 a_n, b_n を フーリエ係数 という。

とくに、a_n を (フーリエ)余弦係数、b_n を 正弦係数 という

例題. $(-\pi, \pi]$ において、次の式で与えられる周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ。

$$f(x) = \pi - |x|.$$

答. $f(x)$ は偶関数なので、$f(x)\cdot\sin nx$ は奇関数。

$$\therefore\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin nx\cdot dx = 0.$$

$f(x)\cdot\cos nx$ は偶関数なので.

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\cdot dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cdot\cos nx\cdot dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cdot\cos nx\cdot dx$$

$n=0$ のとき

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\,dx=\frac{2}{\pi}\left[\pi x-\frac{1}{2}x^2\right]_0^{\pi}=\pi.$$

$n\neq 0$ のとき.

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\pi\cdot\cos nx\cdot dx-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cdot\cos nx\cdot dx$$

$$=2\cdot\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\cdot\left[x\cdot\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{n}\sin nx\cdot dx$$

$$=\frac{2}{\pi\cdot n}\cdot\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi}=-\frac{2}{\pi\cdot n^2}(\cos n\pi-1)$$

ここで n が偶数 $\Rightarrow a_n=0$

n が奇数 $\Rightarrow a_n=\dfrac{4}{\pi\cdot n^2}$ となる.

$\therefore f(x)\sim\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{4}{\pi}\left(\cos x+\dfrac{1}{3^2}\cos 3x+\dfrac{1}{5^2}\cos 5x+\cdots\right)$ である

問題. $(-\pi,\pi]$ において次で与えられる周期 2π の関数 $f(x)$ のフーリエ級数を求めよ.

(1) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}(-\pi-x) & (-\pi<x\leqq 0)\\ \frac{1}{2}(\pi-x) & (0<x\leqq\pi)\end{cases}$

(2) $f(x)=\begin{cases}0 & (-\pi<x<0)\\ 2\cdot\cos x & (0\leqq x\leqq\pi)\end{cases}$

答(1) $f(x)$ は奇関数より. $f(x)\cdot\cos nx$ は奇関数. $\therefore a_n=0$.

$f(x)\cdot\sin nx$ は偶関数より.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin nx\cdot dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cdot\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(\pi-x)\cdot\sin nx\cdot dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\cdot(\pi-x)\right]_0^{\pi}+\frac{1}{n\pi}\int_0^{\pi}-\cos nx\cdot dx$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi}=\frac{1}{n}.$$

$\therefore f(x)\sim\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x+\cdots$ である.

(2) $$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cdot\cos nx\cdot dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}2\cdot\cos x\cdot\cos nx\cdot dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n+1)x+\cos(n-1)x\cdot dx.$$

$n\neq 1$ のとき. $a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n+1}\sin(n+1)x-\frac{1}{n-1}\sin(n-1)x\right]_0^{\pi}=0$

$n=1$ のとき. $a_1=\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}\sin 2x+x\right]_0^{\pi}=1$.

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\sin nx\cdot dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cdot\sin nx\cdot dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}2\cdot\cos x\cdot\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(1+n)x-\sin(1-n)x\cdot dx.$$

$n\neq 1$ のとき. $$b_n=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n+1}\cos(n+1)x+\frac{1}{1-n}\cos(1-n)x\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n+1}\cos\pi(n+1)+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\cos\pi(n-1)+\frac{1}{n-1}\right)$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4n}{\pi(n^2-1)} & (n\text{が偶数})\\ 0 & (n\text{が奇数})\end{cases}$$

$n=1$ のとき. $b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx=\frac{1}{2\pi}\left[-\cos 2x\right]_0^{\pi}=0$.

$$\therefore f(x)\sim\cos x+\frac{4}{\pi}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{(4n^2-1)}\cdot\sin 2nx.$$ である