演習問題

1 次の関数のラプラス変換を求めよ.

(1) $f(t)=1$ (2) $f(t)=U(t-\lambda)$ $(\lambda>0)$

(3) $f(t)=t\cdot e^{t}$ (4) $f(t)=t^{2}$

2 nが自然数のとき, $\Gamma(n)=(n-1)!$ を示せ.

3 $\sin\lambda t$ と $\cos\lambda t$ $(\lambda\neq 0)$ のラプラス変換を求めよ.

(ヒント: 部分積分を2回行う.

4 ラプラス変換を求めよ

(1) $f(t)=t\cdot\sin t$ (2) $f(t)=\sqrt{t}$

解答

1 (1) $L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot 1 \cdot dt = -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{1}{s}$

(2) $L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot U(t-\lambda)\, dt = \int_\lambda^\infty e^{-st} \cdot dt$

$= -\frac{1}{s}\left[e^{-st}\right]_\lambda^\infty = \frac{1}{s} \cdot e^{-\lambda s}$

(3) $L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot t \cdot e^{t} \cdot dt = \int_0^\infty t \cdot e^{(1-s)t} \cdot dt$

$= \left[t \cdot \frac{1}{1-s} e^{(1-s)t}\right]_0^\infty - \frac{1}{1-s}\int_0^\infty e^{(1-s)t} \cdot dt$

$= -\frac{1}{(1-s)^2}\left[e^{(1-s)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{(s-1)^2}$

(4) $L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot t^2\, dt = \left[-\frac{1}{s} t^2 \cdot e^{-st}\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int 2t \cdot e^{-st} \cdot dt$

$= \left[-\frac{1}{s^2} 2t \cdot e^{-st}\right]_0^\infty + \frac{1}{s^2}\int_0^\infty 2 \cdot e^{-st} \cdot dt$

$= -\frac{2}{s^3}\left[e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{2}{s^3}$

2 $\Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{n-1}\, dt$

$= \left[-e^{-t} \cdot t^{n-1}\right]_0^\infty + \int_0^\infty (n-1) \cdot t^{n-2} \cdot e^{-t}\, dt$

$= (n-1) \cdot \Gamma(n-1)$ である. これより

$\Gamma(n) = (n-1) \cdot \Gamma(n-1)$

$= (n-1) \cdot (n-2) \cdot \Gamma(n-2)$

$\vdots$

$= (n-1)(n-2) \cdot (n-3) \cdots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1)$

$= (n-1)!$ である.

3 $L(\sin\lambda t) = I_s$ とおくと

$$I_s = \int_0^\infty e^{-st}\cdot\sin\lambda t\, dt$$
$$= \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\cdot\sin\lambda t\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cdot\lambda\cdot\cos\lambda t\cdot dt$$
$$= \frac{\lambda}{s}\cdot\int e^{-st}\cdot\cos\lambda t\cdot dt$$
$$= \frac{\lambda}{s}\cdot\left(\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\cdot\cos\lambda t\right]_0^\infty - \frac{\lambda}{s}\int_0^\infty e^{-st}\cdot\sin\lambda t\cdot dt\right)$$
$$= \frac{\lambda}{s^2} - \frac{\lambda^2}{s^2}I_s$$ となる. これより I_s について解けば.

$$I_s = \frac{\lambda}{s^2+\lambda^2}$$ となる.

$L(\cos\lambda t)$ は上から三番目の式を使えば.

$$L(\cos\lambda t) = \frac{s}{s^2+\lambda^2}$$ となる

4 (1) $$L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}\cdot t\cdot\sin t\cdot dt.$$
$$= \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\cdot t\cdot\sin t\right]_0^\infty + \frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-st}(\sin t + t\cdot\cos t)\cdot dt$$
$$= \frac{1}{s}\left(L(\sin t) + \int_0^\infty e^{-st}\cdot t\cdot\cos t\cdot dt\right)$$
$$= \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1} + \left[-\frac{1}{s^2}e^{-st}\cdot t\cdot\cos t\right]_0^\infty + \frac{1}{s^2}\int_0^\infty e^{-st}(\cos t - t\cdot\sin t)\,dt$$
$$= \frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{s^2}\cdot\frac{s}{s^2+1} - \frac{1}{s^2}L(f(t))$$

これより $L(f(t)) = \dfrac{2s}{s^2+1}$ となる

(2) $L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}\cdot t^{\frac{1}{2}}\,dt$ 　ここで. $z = st$ とおくと.

$t = \frac{1}{s}\cdot z$, $dt = \frac{1}{s}\,dz$ より

$$L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-z}\cdot\left(\frac{1}{s}z\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{s}dz = s^{-\frac{3}{2}}\cdot\int_0^\infty e^{-z}\cdot z^{\frac{1}{2}}dz = s^{-\frac{3}{2}}\cdot\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$
$$= s^{-\frac{3}{2}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot s^{-\frac{3}{2}}$$ である.