演習問題

1 次を解け

(1) $xy' = x+y$

(2) $y' = \dfrac{y^2-x^2}{2xy}$, $y(1)=3$

(3) $(x-y)\cdot y' + x + y = 0$

(4) $xy' = y + x\cdot\tan\dfrac{y}{x}$, $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$

(5) $xy' = \sqrt{x^2+y^2} + y$ (ヒント：$t = u + \sqrt{u^2+1}$ とおく)

2 次を解け

(1) $y' = \dfrac{x-y-1}{x-2y-1}$

(2) $y' = \dfrac{2x-y+1}{x-2y+5}$

解答

四 (1) $y' = 1 + \frac{y}{x}$ より. $u = \frac{y}{x}$ とおけば 公式2より

$u' = \frac{1}{x}(1 + u - u) = \frac{1}{x}$ となる 公式1より

$\int 1 \cdot du = \int \frac{1}{x} dx$

$u = \log x + c$

$e^u = e^c \cdot x = c \cdot x \quad (e^c \to c)$

$e^{\frac{y}{x}} = c \cdot x$ となる

(2) $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 1}{2 \cdot \frac{y}{x}}$ より $u = \frac{y}{x}$ とおけば 公式2より

$u' = \frac{1}{x}\left(\frac{u^2 - 1}{2u} - u\right) = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{-u^2 - 1}{2u}\right) = -\frac{1}{x} \cdot \frac{u^2 + 1}{2u}$

となる. 公式1より

$\int \frac{2u}{u^2 + 1} du = -\int \frac{1}{x} dx$

$\log(u^2 + 1) = -\log x + c$

$u^2 + 1 = e^c \cdot \frac{1}{x} = c \cdot \frac{1}{x} \quad (e^c \to c)$

$\frac{y^2}{x^2} + 1 = c \cdot \frac{1}{x}$

$x^2 + y^2 = c \cdot x$. となる. ここで $y(1) = 3$ より

$1^2 + 3^2 = c \cdot 1$ となり $c = 10$ を得る

$\therefore \ x^2 + y^2 = 10 \cdot x$ である.

(3) $y' = \dfrac{-x-y}{x-y} = -\dfrac{1+\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}}$ より $u=\dfrac{y}{x}$ とおけば 公式2より

$$u' = \frac{1}{x}\left(-\frac{1+u}{1-u} - u\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{u^2-2u-1}{1-u}\right) = \frac{-2}{x}\left(\frac{u^2-2u-1}{2u-2}\right)$$

となる ∴公式1より

$$\int \frac{2u-2}{u^2-2u-1}\,du = -2\cdot\int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\log(u^2-2u-1) = -2\log x + C$$

$$u^2-2u-1 = e^C\cdot\frac{1}{x^2} = C\cdot\frac{1}{x^2} \quad (e^C \to C)$$

$$\frac{y^2}{x^2} - \frac{2y}{x} - 1 = C\cdot\frac{1}{x^2}$$

$y^2-2xy-x^2 = C$ となる

(4) $y' = \dfrac{y}{x} + \tan\dfrac{y}{x}$ より $u=\dfrac{y}{x}$ とおけば 公式2より

$u' = \dfrac{1}{x}(u+\tan u - u) = \dfrac{1}{x}\cdot\tan u$ となる ∴公式1より

$$\int \frac{\cos u}{\sin u}\,du = \int\frac{1}{x}\,dx$$

$$\log(\sin u) = \log x + C$$

$$\sin u = e^C x = C\cdot x \quad (e^C \to C)$$

$\sin\dfrac{y}{x} = C\cdot x$ となる.

ここで $y(1) = \dfrac{\pi}{2}$ より $1 = C\cdot 1$ となり $C=1$ である

∴ $\sin\dfrac{y}{x} = x$ が 解である.

(5). $y' = \sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} + \frac{y}{x}$ より　$u=\frac{y}{x}$ とおけば 公式2より

$$u' = \frac{1}{x}\left(\sqrt{1+u^2}+u-u\right) = \frac{1}{x}\cdot\sqrt{1+u^2}$$ となる　∴公式1より

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du = \int \frac{1}{x}\,dx \quad \cdots ☆$$ となる.

ここで $t=u+\sqrt{u^2+1}$ とおくと.　$u=\frac{t^2-1}{2t}$ より

$$\sqrt{u^2+1}=\sqrt{\frac{(t^2-1)^2}{4t^2}+1}=\frac{t^2+1}{2t}$$ となる. また.

$$du = dt\cdot\frac{4t^2-2t^2+2}{4t^2} = dt\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}$$ である. これより

$$\int\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\,du = \int\frac{2t}{t^2+1}\cdot\frac{t^2+1}{2t^2}\,dt = \int\frac{1}{t}\,dt = \log t$$

$$= \log\left(u+\sqrt{u^2+1}\right)$$ となる.　∴☆は

$$\log\left(u+\sqrt{u^2+1}\right) = \log x + C$$

$$u+\sqrt{u^2+1} = e^C\cdot x = C\cdot x \qquad (e^C\to C)$$

$$y+\sqrt{x^2+y^2} = C\cdot x^2$$ となる.

$\boxed{3}$ (1). $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x-2y-1=0 \end{cases}$ として連立方程式を解くと.　$\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ である

∴ $X=x-1$, $Y=y$ とおけば与式は

$$Y' = \frac{X-Y}{X-2Y} = \frac{1-\frac{Y}{X}}{1-2\cdot\frac{Y}{X}}$$ とできる.　$u=\frac{Y}{X}$ とおけば 公式2より

$$u' = \frac{1}{X}\left(\frac{1-u}{1-2u}-u\right) = \frac{1}{X}\left(\frac{2u^2-2u+1}{1-2u}\right) = -\frac{2}{X}\cdot\frac{2u^2-2u+1}{4u-2}$$

となる　∴公式1より

$$\int \frac{4u-2}{2u^2-2u+1}\,du = -2\cdot\int \frac{1}{X}\,dX$$

$$\log 2u^2-2u+1 = -2\log X + c$$

$$2u^2-2u+1 = e^c\cdot\frac{1}{X^2} = c\cdot\frac{1}{X^2} \quad (e^c \to c)$$

$$2Y^2-2XY+X^2 = c$$

$$2y^2-2xy-2y+x^2+2x+1 = c$$

$$2y^2-2xy+2y+x^2-2x = c \qquad (c-1 \to c)$$ となる

(2) $\begin{cases} 2x-y+1=0 \\ x-2y+5=0 \end{cases}$ を解くと $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ となる

∴ $X=x-1$, $Y=y-3$ とおけば、与式は

$$Y' = \frac{2X-Y}{X-2Y} = \frac{2-\frac{Y}{X}}{1-2\frac{Y}{X}}$$ とできる。∴ 公式2より $u=\frac{Y}{X}$ とすれば、

$$u' = \frac{1}{X}\cdot\left(\frac{2-u}{1-2u}-u\right) = \frac{1}{X}\left(\frac{2u^2-2u+2}{1-2u}\right) = \frac{-2}{X}\cdot\frac{u^2-u+1}{2u-1}$$ となる

∴ 公式1より

$$\int \frac{2u-1}{u^2-u+1}\,du = -2\int\frac{1}{X}\,dX$$

$$\log(u^2-u+1) = \log X^{-2} + c$$

$$u^2-u+1 = e^c\cdot X^{-2} = c\cdot X^{-2} \quad (e^c \to c)$$

$$Y^2-XY+X^2 = c$$

$$y^2-6y+9-xy+3x+y-3+x^2-2x+1 = c$$

$$y^2-xy-5y+x^2+x = c \qquad (c-7 \to c)$$ となる