演習問題

1 次の微分方程式を解け.

(1) $y' = -\dfrac{x}{y}$　　(2) $y' \cdot \sin x = y \cdot \cos x$, $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$.

(3) $y' = y^{\frac{3}{2}}$, $y(0) = 1$

(4) $y' = 2 \cdot e^{x} y^{3}$, $y(0) = \dfrac{1}{2}$

(5) $(1-x^2)y' + (1-y^2) = 0$

(6) $y' = e^{x+y} + 2 \cdot x \cdot e^{x^2+y}$

2 かっこ内の変数変換を用いて. 次の微分方程式を解け.

(1) $xy' = e^{-xy} - y$　　$(u = xy)$

(2) $y' = (-4x+y-3)^2$　　$(u = -4x+y-3)$

(3) $y' = 1 + (x-y) \cdot \tan x$　　$(u = x-y)$

(4) $(1-xy) \cdot y - (1+xy) \cdot x \cdot y' = 0$　　$(u = xy)$

解答

(1) $P(x)=-x$, $q(y)=\frac{1}{y}$ とおいて公式を用いると.

$\int y\,dy=\int -x\,dx$ より.

$\frac{1}{2}y^2=-\frac{1}{2}x^2+c$

$x^2+y^2=2c$

$x^2+y^2=c$ $(2c\to c)$ となる.

(2) $y'=\frac{\cos x}{\sin x}\cdot y$ より $P(x)=\frac{\cos x}{\sin x}$, $q(y)=y$ として公式を用いると.

$\int\frac{1}{y}dy=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx$ より

$\log y=\log\sin x+c$

$y=e^c\cdot\sin x$

$y=c\cdot\sin x$ $(e^c\to c)$ となる

ここで $y(\frac{\pi}{2})=1$ より $1=c\cdot\sin\frac{\pi}{2}=c$ となるので.

$y=\sin x$ が求める解である.

(3) $P(x)=1$, $q(y)=y^{\frac{3}{2}}$ とおいて公式を求めると.

$\int y^{-\frac{3}{2}}dy=\int 1\cdot dx$ より

$-2\cdot y^{-\frac{1}{2}}=x+c$

$y(x+c)^2=4$ となる.

ここで $y(0)=1$ より. $-2\cdot 1^{-\frac{1}{2}}=0+c$ となり $c=-2$ である

$\therefore y(x-2)^2=4$ が求める解である.

(4) $P(x)=2\cdot e^x$, $q(y)=y^3$ として公式を用いると

$$\int \frac{1}{y^3}dy = \int 2\cdot e^x dx$$ より

$$-\frac{1}{2}y^{-2} = 2\cdot e^x + C$$

$$y^2(-4e^x-2C)=1$$

$$y^2(C-4e^x)=1 \qquad (-2C\to C)$$

ここで $y(0)=\frac{1}{2}$ より $\frac{1}{4}(C-4)=1$. ∴ $C=8$ となり

$y^2(8-4e^x)=1$ が求める解である.

(5) $y'=-\frac{1-y^2}{1-x^2}$ より $P(x)=-\frac{1}{1-x^2}$, $q(y)=1-y^2$ として公式を用いると.

$$\int \frac{1}{1-y^2}dy = -\int \frac{1}{1-x^2}dx$$ より

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-y}+\frac{1}{1+y}dy = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+x}dx$$

$$-\log(1-y)+\log(1+y) = \log(1-x)-\log(1+x)+C$$

$$\frac{1+y}{1-y} = e^C\cdot\frac{1-y}{1+x} = C\cdot\frac{1-y}{1+x} \qquad (e^C\to C)$$

$$(1+x)(1+y)=C\cdot(1-x)(1-y)$$

$$y(x+1+C-Cx) = -Cx+C-x-1$$

$$y((1-C)x+(1+C)) = -(1+C)x+C-1$$

$$y\left(-\frac{1-C}{1+C}x-1\right) = x+\frac{1-C}{1+C}$$

$$y(Cx-1) = x-C \qquad \left(-\frac{1-C}{1+C}\to C\right)$$

となる.

(6) $y' = e^{y}(e^{x}+2x\cdot e^{x^2})$ より $p(x)=e^{x}+2x\cdot e^{x^2}$, $q(y)=e^{y}$ とおくと.

$\int e^{-y}dy = \int e^{x}+2x\cdot e^{x^2}dx$ となり

$-e^{-y} = e^{x}+e^{x^2}+c$

$e^{y}(c-e^{x}-e^{x^2})=1 \quad (-c\to c)$ となる.

$\boxed{2}$ (1) $u' = y+xy'$ より ~~5~~式は

$u' = e^{-u}$ とできる $p(x)=1$, $q(u)=e^{-u}$ とすると.

$\int e^{u}du = \int 1\cdot dx$ より

$e^{u} = x+c$ となる.

$\therefore e^{xy} = x+c$ である.

(2) $u' = -4+y'$ より ~~5~~式は

$4+u' = u^2$

$u' = u^2-4$ となる $p(x)=1$. $q(u)=u^2-4$ とおいて.

$\int \frac{1}{u^2-4}du = \int 1\cdot dx$ より

$\frac{1}{4}\int \frac{1}{u-2}-\frac{1}{u+2}du = \int 1\cdot dx$

$\log(u-2)-\log(u+2) = 4x+c$

$\frac{u-2}{u+2} = e^{4x+c} = c\cdot e^{4x} \quad (e^{c}\to c)$

$\frac{-4}{u+2}+1 = c\cdot e^{4x}$

$$u+2=\frac{-4}{c\cdot e^{4x}-1}$$

$$-4x+y-1=\frac{-4}{c\cdot e^{4x}-1}$$

$$\therefore\ y=\frac{-4}{c\cdot e^{4x}-1}+4x+1$$ となる

(3) $u'=1-y'$ より 与式は

$$1-u'=1+u\cdot\tan x$$

$$u'=-u\cdot\tan x$$ とできる。これより

$$\int\frac{1}{u}du=-\int\frac{\sin x}{\cos x}dx$$

$$\log u=\log\cos x+c$$

$$u=e^{c}\cdot\cos x=c\cdot\cos x\quad(e^{c}\to c)$$

$$\therefore\ x-y=c\cdot\cos x$$

$$y=x-c\cdot\cos x$$ となる

(4) $u'=y+xy'=\frac{u}{x}+xy'$ より 与式は.

$$(1-u)\frac{u}{x}-(1+u)\left(u'-\frac{u}{x}\right)=0$$

$$u'-\frac{u}{x}=\frac{1-u}{1+u}\cdot\frac{u}{x}$$

$$u'=\frac{u}{x}\cdot\frac{2}{1+u}=\frac{2}{x}\cdot\frac{u}{1+u}$$ となる. これより

$$\int\frac{1+u}{u}du=\int\frac{2}{x}dx$$

$$\log u+u=\log x^2+c$$

$$u\cdot e^{u}=e^{c}\cdot x^2=c\cdot x^2\quad(e^{c}\to c).$$

$$\therefore\ y\cdot e^{xy}=c\cdot x$$ となる