

演習問題

Ⅱ ラプラス変換を求めよ

$$(1) L(e^{\mu t} \cdot t) \quad (2) L(e^{-\mu t} \cdot t^\lambda) \quad (\lambda > -1)$$

$$(3) L(t \cdot \cos \lambda t) \quad (4) L(t^2 \cdot \cos \lambda t)$$

Ⅲ 次の微分方程式全体をラプラス変換し、 $L(x(t)) = X(s)$ の方程式を導き、さらに $X(s)$ について解け。

$$(1) 2x'' + 5x' - 3x = t \quad (x(0) = 0, x'(0) = 2)$$

$$(2) x'' + 4x' + 8x = 10 \cdot \sin 2t \quad (x(0) = 0, x'(0) = 1)$$

$$(3) x'' + 5x' + 6x = 10 \cdot e^{-2t} \cdot \sin 2t \quad (x(0) = 0, x'(0) = -3)$$

Ⅳ ラプラス変換を求めよ

$$(1) \frac{e^t}{\sqrt{t}} \quad (2) e^{\mu t} (1-t)^2 \quad (3) t \cdot e^{\mu t} \cdot \cos \lambda t$$

解答

簡単のため、ラプラス変換表を使うときは "㉓ より" のように書き、

ラプラス変換の基本法則を使うときは "㉔ より" のように書く。

□ (1) ㉑ の $a=0, b=1$ の場合なので、

$$L(e^{\mu t} \cdot t) = \frac{1}{(s-\mu)^2}$$

(2) ㉕ と ㉑ より

$$L(e^{-\mu t} t^\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{(s+\mu)^{\lambda+1}}$$

$$\begin{aligned} (3) \cdot L(t \cdot \cos \lambda t) &= -L(-t \cdot \cos \lambda t) \quad \swarrow \text{㉖ と ㉑ より} \\ &= -\left(\frac{s}{s^2+\lambda^2}\right)' \\ &= -\frac{s^2+\lambda^2-2s^2}{(s^2+\lambda^2)^2} = \frac{s^2-\lambda^2}{(s^2+\lambda^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (4) L(t^2 \cdot \cos \lambda t) &= L((-t)^2 \cdot \cos \lambda t) \quad \swarrow \text{㉖ と ㉑ より} \\ &= \left(\frac{s}{s^2+\lambda^2}\right)'' \\ &= -\left(\frac{s^2-\lambda^2}{(s^2+\lambda^2)^2}\right)' \\ &= -\frac{2s(s^2+\lambda^2)^2 - 2 \cdot 2s \cdot (s^2+\lambda^2)(s^2-\lambda^2)}{(s^2+\lambda^2)^4} = \frac{2s(s^2-3\lambda^2)}{(s^2+\lambda^2)^3} \end{aligned}$$

$$\square L(x'(t)) = s \cdot X(s) - x(0)$$

$$L(x''(t)) = s^2 X(s) - x(0) \cdot s - x'(0) \quad \text{を使うと}$$

$$(1) 2(s^2 X(s) - 2) + 5(s X(s)) - 3X(s) = \frac{1}{s^2} \quad \text{となる}$$

$$(2s^2 + 5s - 3)X(s) = \frac{1}{s^2} - 4 \quad \text{より}$$

$$X(s) = \frac{1}{2s^2 + 5s - 3} \cdot \left(\frac{1}{s^2} - 4\right)$$

$$(2) (s^2 X(s) - 1) + 4(sX(s)) + 8(X(s)) = 10 \cdot \frac{2}{s^2 + 4} \quad \text{よ')}$$

$$(s^2 + 4s + 8)X(s) = \frac{20}{s^2 + 4} + 1.$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 4s + 8} \cdot \frac{s^2 + 24}{s^2 + 4} \quad \text{とある}$$

$$(3) (s^2 X(s) + 3) + 5(sX(s)) + 6 \cdot X(s) = 10 \cdot \frac{2}{(s+2)^2 + 4} \quad \text{よ')}$$

$$(s^2 + 5s + 6)X(s) = \frac{20}{s^2 + 4s + 8} - 3$$

$$X(s) = \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \cdot \left(\frac{20}{s^2 + 4s + 8} - 3 \right) \quad \text{とある}$$

$$\boxed{3} (1) L\left(\frac{e^t}{\sqrt{t}}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s-1}} \quad (\text{㊸ と ㊹ よ'})$$

$$(2) L(e^{\mu t} (1-t)^2) = \frac{2}{(s-1)^3} - \frac{2}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1} \quad (\text{㊸ と ㊹ よ'})$$

$$(3) L(t \cdot e^{\mu t} \cos \lambda t) = -L(-t \cdot e^{\mu t} \cos \lambda t) \\ = -(L(e^{\mu t} \cos \lambda t))' \quad \text{とある. さいご'}$$

$$L(e^{\mu t} \cos \lambda t) = \frac{s-\mu}{(s-\mu)^2 + \lambda^2} \quad (\text{㊹ よ'}) \quad \text{たの'}$$

$$L(t \cdot e^{\mu t} \cos \lambda t) = -\frac{(s-\mu)^2 + \lambda^2 - 2(s-\mu)(s-\mu)}{((s-\mu)^2 + \lambda^2)^2} \\ = \frac{(s-\mu)^2 - \lambda^2}{((s-\mu)^2 + \lambda^2)^2} \quad \text{とある.}$$