解答例

1(1). 公式1より

$$\int y\,dy = \int -x\,dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$$

$$x^2 + y^2 = 2C = C \quad (2C \to C)$$

(2) $y' = -\tan\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$ より　$u = \frac{y}{x}$ とすれば. 公式2より

$$u' = \frac{1}{x}(-\tan u + u - u) = \frac{1}{x}\cdot(-\tan u)$$ ここで公式1より

$$\int \frac{\cos u}{\sin u}\,du = \int -\frac{1}{x}\,dx$$

$$\log \sin u = -\log x + C$$

$$\sin u = e^C \cdot x^{-1} = C\cdot x^{-1} \quad (e^C \to C)$$ $u = \frac{y}{x}$ を代入し.

$$x \cdot \sin\frac{y}{x} = C$$ となる

(3). $\frac{\partial}{\partial y}(\sin x + 4xy) = 4x$, $\frac{\partial}{\partial x}2x^2 = 4x$ よりこれは完全 ∴公式3より

$$u(x,y) = \int \sin x + 4xy\,dx + \int 2x^2\,dy - \iint 4x\,dx\,dy$$

$$= -\cos x + 2x^2 y = C$$ となる. ここで $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$ より $C = \pi^2$ となり.

$$-\cos x + 2x^2 y = \pi^2$$ となる

(4) $y' + 4\cdot\frac{y}{x} = x^{-5}$ より公式4を使うと.

$$y = e^{-\int\frac{4}{x}dx}\cdot\left(\int x^{-5}\cdot e^{\int\frac{4}{x}dx}dx + C\right) = e^{-4\log x}\left(\int x^{-5}\cdot e^{4\log x}dx + C\right)$$

$$= \frac{1}{x^4}\left(\int\frac{1}{x}dx + C\right) = \frac{1}{x^4}(\log x + C)$$ となる.

2. $z = y^{1-\frac{3}{2}} = y^{-\frac{1}{2}}$ とおくと. $y = z^{-2}$, $y' = -2 \cdot z' \cdot z^{-3}$ より

$$-2z'z^{-3} + 2z^{-2} = 2x \cdot z^{-3}$$

$z' - z = -x$ となる. ∴公式4より

$$z = e^{-\int -1 dx}\left(\int -x \cdot e^{\int -1 dx} dx + c\right)$$

$$= e^{x}\left(\int -xe^{-x} + c\right) = e^{x}\left(xe^{-x} - \int e^{-x}dx + c\right)$$

$$= e^{x}\left(xe^{-x} + e^{-x} + c\right) = x + 1 + c \cdot e^{x}$$ より

$y^{-\frac{1}{2}} = x + 1 + c \cdot e^{x}$ となる

3.(1) $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = 1$ である

(2) $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^n dt = \left[-e^{-t}t^n\right]_0^\infty + \int e^{-t} n \cdot t^{n-1} dt$

$= n \cdot \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{n-1} dt = n \cdot \Gamma(n)$ となり成立.

(3) まず, (2) より $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n(n-1) \cdot \Gamma(n-1) = \cdots = n!\,\Gamma(1) = n!$ である.

$L(f(t)) = L(t^n) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot t^n dt$ 　ここで $z = st$ とすると.

$dz = s \cdot dt$, $t = \frac{z}{s}$ より

$$= \int_0^\infty e^{-z} \cdot \frac{z^n}{s^n} \cdot \frac{dz}{s} = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^\infty e^{-z} \cdot z^n dz$$

$$= \frac{1}{s^{n+1}} \cdot \Gamma(n+1) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$ である.

4. 全体をラプラス変換すると.

$s^2X(s) - s + 1 - 6(sX(s) - 1) + 9X(s) = 0$ より

$(s^2 - 6s + 9)X(s) = s - 7$

$X(s) = \frac{s-7}{s^2-6s+9} = \frac{1}{s-3} - \frac{4}{(s-3)^2}$ となる. これをラプラス逆変換して.

$x(t) = e^{3t} - 4t \cdot e^{3t}$ となる.

5. 全体をラプラス変換すると.

$$\begin{cases} sX(s) - 8 - 2X(s) + 3Y(s) = 0 \\ 2X(s) + sY(s) - 3 - Y(s) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (s-2)X(s) + 3Y(s) = 8 \\ 2X(s) + (s-1)Y(s) = 3 \end{cases}$$

$$2(s-2)X(s) + (s^2-3s+2)Y(s) = 3s-6$$

$$-)\ \underline{2(s-2)X(s) + \quad 6 \quad Y(s) = 16}$$

$$(s^2-3s-4)Y(s) = 3s-22.$$

$Y(s) = \dfrac{3s-22}{s^2-3s-4} = \dfrac{-2}{s-4} + \dfrac{5}{s+1}$ となり

$y(t) = -2 \cdot e^{4t} + 5 \cdot e^{-t}$ となる. これをもとの第2式に代入し.

$$2x(t) = y(t) - y'(t) = -2e^{4t} + 5e^{-t} + 8e^{4t} + 5e^{-t}$$

$$= 6e^{4t} + 10e^{-t}$$

$x(t) = 3e^{4t} + 5e^{-t}$ となる.