§4. ラプラス変換

$[0, \infty)$ 上で定義された関数 $f(t)$ と実数 s に対して.

$$\int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)\, dt = \lim_{T \to \infty} \int_0^T e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt$$

が収束するとき、この値を s の関数とみなすことができる.

この関数を, $F(s)$, $L(f(t))$, $L(f)$ などで表し.

$$F(s) = L(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) \cdot dt$$

と書く. この関数を $f(t)$ のラプラス変換という.

$F(s) = L(f)$ を像関数, $f(t)$ を原関数という.

例題. $f(t) = t$ のラプラス変換と. それが収束する s の範囲を求めよ.

答. $$\int_0^T e^{-st} \cdot t\, dt = \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \cdot t\right]_0^T + \frac{1}{s}\int_0^T e^{-st}\, dt$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-sT} - \frac{1}{s^2}\left[e^{-st}\right]_0^T = -\frac{1}{s} e^{-sT} - \frac{1}{s^2} e^{-sT} + \frac{1}{s^2} \quad (s \neq 0)$$

となる. ここで、$s > 0$ なら. $T \to \infty$ は収束して.

$$F(s) = \frac{1}{s^2}$$ となる

$s < 0$ なら収束しない.

$s = 0$ のときは.

$$\int_0^T t\, dt = \frac{1}{2} T^2$$ より. やはり収束しない

$\therefore$ $s > 0$ のとき収束し. $F(s) = \frac{1}{s^2}$ である.

問題. 次の関数のラプラス変換と収束する s の範囲を求めよ.

(1) $f(t)=1$, (2) $f(t)=e^{\lambda t}$ (λは実数) (3) $f(t)=\sin\lambda t$ ($\lambda>0$)

答. (1). $s=0$ のとき $\int_0^\infty 1\,dt=\infty$ より収束しない.

$s\neq 0$ のときは.

$$\int_0^T e^{-st}dt=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^T=-\frac{1}{s}e^{-sT}+\frac{1}{s}$$ となるので.

$s>0$ のときに収束し. $F(s)=\frac{1}{s}$ である

(2). $$\int_0^T e^{-st}\cdot e^{\lambda t}dt=\int_0^T e^{(\lambda-s)t}dt=\left[\frac{1}{\lambda-s}e^{(\lambda-s)t}\right]_0^T$$

$$=\frac{1}{\lambda-s}e^{(\lambda-s)T}-\frac{1}{\lambda-s}$$ より.

$s>\lambda$ のときに収束し. $F(s)=\frac{1}{s-\lambda}$ である

(3) $I_s=\int e^{-st}\cdot\sin\lambda t\,dt$ とおいて. 不定積分を求めると.

$$I_s=-\frac{1}{\lambda}e^{-st}\cdot\cos\lambda t-\frac{s}{\lambda}\int e^{-st}\cdot\cos\lambda t\,dt$$

$$=-\frac{1}{\lambda}e^{-st}\cdot\cos\lambda t-\frac{s}{\lambda^2}e^{-st}\cdot\sin\lambda t-\frac{s^2}{\lambda^2}\int e^{-st}\cdot\sin\lambda t\,dt$$

$$=-\frac{1}{\lambda}e^{-st}\cdot\cos\lambda t-\frac{s}{\lambda^2}e^{-st}\cdot\sin\lambda t-\frac{s^2}{\lambda^2}I_s$$ より

$$I_s=\frac{-e^{-st}}{s^2+\lambda^2}(\lambda\cos\lambda t+s\cdot\sin\lambda t)$$ となる.

∴ $s>0$ のときに収束し.

$$F(s)=[I_s]_0^\infty=\frac{\lambda}{s^2+\lambda^2}$$ となる

定理. $f(t)$ のラプラス変換が s_0 で存在(収束)すれば.

$s > s_0$ である s に対し. ラプラス変換が存在する.

∵ $f(t) > 0$ の場合だけ考える.

$$0 \leqq \int_0^T e^{-st} f(t)\,dt \leqq \int_0^T e^{-s_0 t} \cdot f(t)\,dt \longrightarrow F(s_0) \quad (T \to \infty).$$

これらが T に対し単調増加であることを考えれば, $F(s)$ が存在する.

この定理から, ある α が存在して.

$s > \alpha$ で $F(s)$ は収束, $s < \alpha$ で $F(s)$ は収束しない. とできる.

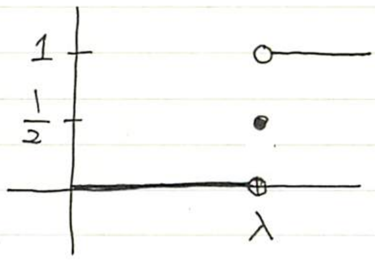
この α を $F(s)$ の収束座標, $s > \alpha$ である s の範囲を 収束域 という.

以下. 収束域や定義域は省略して考える.

単位関数とガンマ関数.

$\lambda > 0$ に対し.

グラフ



$$U(t-\lambda) = \begin{cases} 0 & (t < \lambda) \\ \frac{1}{2} & (t = \lambda) \\ 1 & (t > \lambda) \end{cases}$$

で定義される関数を単位関数という.

また. $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{s-1} \cdot dt$ をガンマ関数という.

この積分は $s > 0$ で収束し.

$\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$, $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ が成り立つ.

とくに. n が自然数なら. $\Gamma(n) = (n-1)!$ である

$\because$ $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = -[e^{-t}]_0^\infty = 1$.

$$\Gamma(s+1) = \int_0^\infty e^{-t}\cdot t^s\,dt = -[e^{-t}\cdot t^s]_0^\infty + s\cdot\int_0^\infty e^{-t}\cdot t^{s-1}\,dt = s\cdot\Gamma(s)$$

問題 (1) $L(U(t-\lambda))$ を求めよ

(2) $L(t^\lambda)$ $(\lambda > -1)$ をガンマ関数を使って表せ.

(3) $L(t^n)$ (nは自然数) を求めよ.

答 (1) $\int_0^\infty e^{-st}\cdot U(t-\lambda)\,dt = \int_\lambda^\infty e^{-st}\,dt$

$= -\frac{1}{s}[e^{-st}]_\lambda^\infty = \frac{1}{s}\cdot e^{-s\lambda}$ である

(2) $L(t^\lambda) = \int_0^\infty e^{-st}\cdot t^\lambda\,dt$ であるが.

$z = st$ とおいて変数変換すると. $dz = s\cdot dt$ より

$$L(t^\lambda) = \int_0^\infty e^{-z}\cdot\left(\frac{z}{s}\right)^\lambda\cdot\frac{1}{s}\,dz$$

$= \frac{1}{s^{\lambda+1}}\int_0^\infty e^{-z}\cdot z^\lambda\,dz = \frac{1}{s^{\lambda+1}}\Gamma(\lambda+1)$ である.

(3) $L(t^n) = \frac{1}{s^{n+1}}\Gamma(n+1) = \frac{n!}{s^{n+1}}$ である.