§3. 常微分方程式の解の存在

1階微分方程式が

$$y' = f(x, y)$$

この形を正規形という

で与えられているとき、"微分方程式が解をもつか" という問題を考える。

a, b を正の定数，(x_0, y_0) を固定された点としたとき

$D = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leqq a,\ |y - y_0| \leqq b\}$ とする

D 上の連続関数全体を $C(D)$ で表す。

<u>Def</u>. $f(x, y) \in C(D)$ が D 上でリプシッツ条件をみたすとは

ある正数 K に対して

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq K \cdot |y_1 - y_2| \qquad ((x, y_1), (x, y_2) \in D)$$

が成り立つことである。

<u>例1</u>. $f(x, y) \in C(D)$ が、y について偏微分可能で、

$f_y(x, y)$ が連続なら、$f(x, y)$ は D 上でリプシッツ条件をみたす。

∵ D 上で $|f_y(x, y)|$ の最大値を K とすると 平均値の定理から

$$f(x, y_1) - f(x, y_2) = f_y(x, \xi) \cdot (y_1 - y_2)$$ であるので

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq K \cdot |y_1 - y_2|$$ となる。

例2. $f(x,y)=\sqrt{y}$, $D=\{(x,y)\mid 0\leqq|x|\leqq a,\ 0\leqq y\leqq b\}$ とすると.

$f(x,y)$ はリプシツ条件をみたさない.

∵ もし.ある K が存在して.

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqq K\cdot|y_1-y_2| \quad \text{とできたとすると.}$$

$$\text{左辺}=|\sqrt{y_1}-\sqrt{y_2}|=\frac{1}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}}|y_1-y_2| \quad \text{とできる} \quad (y_1, y_2\neq 0)$$

ここで $y_1\neq y_2$ ならば.

$$K\geqq\frac{1}{\sqrt{y_1}+\sqrt{y_2}}\longrightarrow\infty \quad (y_1, y_2\to 0)$$ より矛盾.

問題 (1) $D=\{(x,y)\mid 0\leqq|x|\leqq a,\ 0\leqq|y|\leqq b\}$ 上で.

$f(x,y)=xy$ が.リプシツ条件をみたすことを示せ.

(2) $D=\{(x,y)\mid |x|\leqq 1,\ |y|\leqq 1\}$ 上で.

$f(x,y)=\sqrt{1-y^2}$ がリプシツ条件をみたさないことを示せ.

答 (1) $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=|xy_1-xy_2|\leqq a\cdot|y_1-y_2|$

より,リプシツ条件をみたす.

(2). $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\left|\sqrt{1-y_1^2}-\sqrt{1-y_2^2}\right|$

$$=\frac{|y_1+y_2|}{\sqrt{1-y_1^2}+\sqrt{1-y_2^2}}\cdot|y_1-y_2| \quad \text{であり}$$

$$\frac{|y_1+y_2|}{\sqrt{1-y_1^2}+\sqrt{1-y_2^2}}\longrightarrow\infty \quad (y_1, y_2\to 1) \quad \text{より}$$

リプシツ条件をみたさない

定理(コーシー・リプシッツの定理)

$f(x,y) \in C(D)$ が D 上でリプシッツ条件をみたすとき、微分方程式

$y' = f(x,y)$ には、初期条件 $y(x_0) = y_0$ を満たす解 $y = y(x)$ が、

閉区間 $|x - x_0| \leqq C = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ でただ一つ存在する。

ただし、$M = \max_{(x,y)\in D} |f(x,y)|$ である

∵ もし、$y = y(x)$ が存在すれば、

$y' = f(x, y(x))$ を満たしている。この式を積分すると、

$$\int_{x_0}^{x} y'(x)\,dx = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx$$ とできるが、

左辺 $= y(x) - y(x_0) = y(x) - y_0$ より、

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx + y_0$$ を得る。

逆に、この積分方程式をみたす解は求める解になる。

そこで、これを解くために、関数列、$y_0(x), y_1(x), \cdots, y_n(x)$ を、

$|x - x_0| \leqq C$ で次のようにとる。

$$y_0(x) = y_0$$

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\,dx$$

$y_n(x)$ が定義できること.

$(x, y_n(x)) \in D$ を示す. つまり $|y_n(x) - y_0| \leqq b$ を示す.

$n=0$ のときは $y_0(x) = y_0$ より $(x, y_0) \in D$ は明らか.

次に. $(x, y_{n-1}(x)) \in D$ を仮定すると.

$$
\begin{aligned}
|y_n(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\, dx \right| \\
&\leqq \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, y_{n-1}(x))|\, dx \right| \\
&\leqq \left| \int_{x_0}^{x} M\, dx \right| \leqq M \cdot C \leqq b
\end{aligned}
$$

より示された.

$y_n(x) \longrightarrow y(x)$ とできること.

$$
\begin{aligned}
|y_n(x) - y_{n-1}(x)| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-2}(x))\, dx \right| \\
&\leqq \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, y_{n-1}(x)) - f(x, y_{n-2}(x))|\, dx \right| \\
&\leqq K \cdot \left| \int_{x_0}^{x} |y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)|\, dx \right|
\end{aligned}
$$

リプシッツ条件の K とできる. これより.

$$|y_1(x) - y_0(x)| \leqq \left| \int_{x_0}^{x} |f(x, y_0)|\, dx \right| \leqq M \cdot |x - x_0|$$

$$
\begin{aligned}
|y_2(x) - y_1(x)| &\leqq K \cdot \left| \int_{x_0}^{x} |y_1(x) - y_0(x)|\, dx \right| \\
&\leqq K \cdot M \cdot \left| \int_{x_0}^{x} |x - x_0|\, dx \right| \\
&\leqq \frac{KM}{2!} \cdot |x - x_0|^2
\end{aligned}
$$

以下同様にすると.

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leqq \frac{K^{n-1} \cdot M}{n!} \cdot |x - x_0|^n$$ となる

これより $y_n(x) = y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1}(x) - y_k(x))$ は

$|x - x_0| \leqq C$ で一様収束する.

∴ $y(x) = \lim y_n(x)$ が存在して. $y(x)$ は連続関数になる.

また. $y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\,dx$ であったが.

この両辺に $\lim_{n\to\infty}$ をつけると.

$$y(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\,dx$$

$$= y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y(x))\,dx$$ となり. $y(x)$ は解になる

$y = y(x)$ がただ1つの解であること.

$\tilde{y}(x)$ も解であるとすると.

$\tilde{y}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \tilde{y}(x))\,dx$ をみたす. これより.

$$|\tilde{y}(x) - y(x)| = \left| \int_{x_0}^{x} f(x, \tilde{y}(x)) - f(x, y(x))\,dx \right|$$

$$\leqq K \cdot \left| \int_{x_0}^{x} |\tilde{y}(x) - y(x)|\,dx \right|$$ となる

今. N を. $|\tilde{y}(x) - y(x)|$ の最大値とすると.

$|\tilde{y}(x) - y(x)| \leqq N \cdot K \cdot |x - x_0|$ となる. これを上の式に代入すると

$|\tilde{y}(x) - y(x)| \leqq N^2 K \cdot \frac{1}{2!} |x - x_0|^2$. となる,

以下くり返すと

$|\tilde{y}(x) - y(x)| \leqq N^n K \cdot \frac{1}{n!} |x - x_0|^n \longrightarrow 0$ となり. $y(x) = \tilde{y}(x)$ となる //

この証明の中で用いられた方法を逐次近似の方法という.

例1. $y' = xy$, $y(0) = 1$ の逐次近似解 $y_2(x)$ を求めよ.

答. $y_0(x) = 1$. $y_n(x) = 1 + \int_0^x x \cdot y_{n-1}(x)\, dx$ より

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x x\, dx = 1 + \frac{1}{2}x^2$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x x + \frac{1}{2}x^3\, dx$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4$$ である

問題. 逐次近似解 $y_2(x)$ を求めよ.

(1) $y' = xy + 1$, $y(0) = 1$.

(2) $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$

答(1) $y_0(x) = 1$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x x + 1 = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x x\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2\right) + 1\, dx$$

$$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}x^4$$ である

(2) $y_0(x) = 0$

$$y_1(x) = \int_0^x x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3$$

$$y_2(x) = \int_0^x x^2 + \frac{1}{9}x^6\, dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7$$ である