熱伝導方程式

長さπの熱伝導体が [0, π] にあり，時刻 t における温度を $y(x,t)$ で表すと．
温度変化について．

$$c^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial y}{\partial t}$$ が成り立つ．これを熱伝導方程式という．

例題．熱伝導方程式を次の条件で解け．

$$y(0,t)=0,\ y(\pi,t)=0,\ y(x,0)=\sin x.$$

答．t でラプラス変換すると．

$$c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y(x,s) = sY(x,s) - y(x,0) = sY(x,s) - \sin x.$$

$$Y(0,s)=0,\ Y(\pi,s)=0.$$

となる $\frac{\partial}{\partial x}Y(0,s) = A(s)$ として．x でラプラス変換すると．

$$c^2 \cdot \left(\xi^2 \cdot Y^*(\xi,s) - \xi \cdot Y(0,s) - A(s)\right) - sY^*(\xi,s) = -\frac{1}{\xi^2+1}$$

$$(c^2\xi^2 - s)Y^*(\xi,s) = c^2 \cdot A(s) - \frac{1}{\xi^2+1}$$

$$Y^*(\xi,s) = \frac{c^2 A(s)}{c^2\xi^2 - s} - \frac{1}{(c^2\xi^2-s)(\xi^2+1)}$$

$$= \frac{c^2 \cdot A(s)}{c^2\xi^2 - s} - \frac{1}{c^2+s}\cdot\left(\frac{c^2}{c^2\xi^2-s} - \frac{1}{\xi^2+1}\right)$$ となり．

これをラプラス逆変換して．

$$Y(x,s) = \frac{c}{\sqrt{s}} A(s) \cdot \sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x - \frac{1}{c^2+s}\left(\frac{c}{\sqrt{s}}\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x - \sin x\right)$$ である

$Y(\pi,s)=0$ より　$A(s) = \frac{1}{c^2+s}$ となり

$Y(x,s) = \frac{1}{c^2+s}\cdot\sin x$ となる．これより

$y(x,t) = e^{-c^2 t}\cdot\sin x$ である

問題．熱伝導方程式を以下の条件で解け．

(1) $y(0,t)=0$，$y(\pi,t)=0$，$y(x,0)=\sin 2x$

(2) $y(0,t)=0$，$y(\pi,t)=a\pi$，$y(x,0)=ax$．

答 (1)．tでラプラス変換し．

$$c^2\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2}Y(x,s) = sY(x,s)-\sin 2x\ .$$

$Y(0,s)=0$，$Y(\pi,s)=0$ をえる．

さらに $\frac{\partial}{\partial x}Y(0,s)=A(s)$ として．xでラプラス変換すると．

$$c^2(\xi^2 Y^*(\xi,s)-A(s)) = sY^*(\xi,s)-\frac{2}{s^2+4}$$

$$Y^*(\xi,s) = \frac{c^2A(s)}{c^2\xi^2-s} - \frac{1}{c^2\xi^2-s}\cdot\frac{2}{s^2+4}$$

$$= \frac{c^2A(s)}{c^2\xi^2-s} - \frac{2}{4c^2+s}\cdot\left(\frac{c^2}{c^2\xi^2-s}-\frac{1}{\xi^2+4}\right)$$ より．

$Y(x,s) = \frac{c}{\sqrt{s}}A(s)\cdot\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x - \frac{2}{4c^2+s}\cdot\left(\frac{c}{\sqrt{s}}\sinh\frac{\sqrt{s}}{c}x - \frac{1}{2}\cdot\sin 2x\right)$ となる

$Y(\pi,s)=0$ より $A(s)=\frac{2}{4c^2+s}$ となり

$Y(x,s) = \frac{1}{4c^2+s}\cdot\sin 2x$

$y(x,t) = e^{-4c^2 t}\cdot\sin 2x$ となる．

(2) tでラプラス変換し.

$$C^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y(x, s) = s \cdot Y(x, s) - ax$$

$Y(0, s) = 0$, $Y(\pi, s) = \frac{a\pi}{s}$ をえる.

さらに $\frac{\partial}{\partial x} Y(0, s) = A(s)$ とすると.

$$C^2 \left(\xi^2 \cdot Y^*(\xi, s) - A(s) \right) = s \cdot Y^*(x, s) - \frac{a}{\xi^2}$$

$$Y^*(\xi, s) = \frac{C^2 A(s)}{C^2 \xi^2 - s} - \frac{1}{C^2 \xi^2 - s} \cdot \frac{a}{\xi^2}$$

$$= \frac{C^2 A(s)}{C^2 \xi^2 - s} - \frac{a}{C^2 s} \left(\frac{1}{C^2 \xi^2 - s} - \frac{C^2}{\xi^2} \right)$$ より

$$Y(x, s) = \frac{c}{\sqrt{s}} A(s) \cdot \sinh \frac{\sqrt{s}}{c} x - \frac{a}{C^2 s} \cdot \left(\frac{c}{\sqrt{s}} \sin \frac{\sqrt{s}}{c} x - C^2 \cdot x \right)$$

となり $Y(\pi, s) = \frac{a\pi}{s}$ より $A(s) = \frac{a}{C^2 s}$ をえて.

$Y(x, s) = \frac{a}{s} x$ となり.

$y(x, t) = ax$ をえる.