偏微分方程式.

2変数関数 $y(x,t)$ の偏微分を含む微分方程式を**偏微分方程式**という

ここでは.変数 t が時間を表し.変数 x が位置を表すとして.

$y(x,0)=a$, $\frac{\partial y}{\partial t}(x,0)=b$ のような条件を**初期条件**

$y(0,t)=c$, $y(l,t)=d$ のような条件を**境界条件** という.

ラプラス変換も、x についてのラプラス変換と.t についてのラプラス変換があるので.

それぞれ L_x, L_t で表す.さらに $\frac{\partial}{\partial x}$ と L_t の順序交換が可能であるとする.

このとき.$L_t(y(x,t))=Y(x,s)$ とおくと.次が成立.

$$L_t\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)=s\cdot Y(x,s)-y(x,0) \qquad (1,1)$$

$$L_t\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t^2}\right)=s^2Y(x,s)-s\,y(x,0)-\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) \qquad (1,2)$$

$$L_t\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}L_t(y(x,t))=\frac{\partial}{\partial x}Y(x,s) \qquad (2,1)$$

$$L_t\left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}Y(x,s) \qquad (2,2)$$

$$L_t\left(\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x\cdot\partial t}\right)=\frac{\partial}{\partial x}L_t\left(\frac{\partial y(x,t)}{\partial t}\right)=s\cdot\frac{\partial Y(x,s)}{\partial x}-\frac{\partial y}{\partial x}(x,0) \qquad (2,3)$$

また.$L_x(Y(x,s))=Y^*(\xi,s)$ とおいて 次のように偏微分方程式を解く.

$$\begin{tikzcd}
\text{偏微分方程式.} \arrow[r, dashed] \arrow[d, "L_t"] & \text{偏微分方程式の解} \\
x\text{の微分方程式} \arrow[d, "L_x"] & \text{微分方程式の解} \arrow[u, "L_t^{-1}"'] \\
\text{像方程式} \arrow[r] & \text{像方程式の解} \arrow[u, "L_x^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

波動方程式

x軸の$[0, l]$に張られた弦のt秒後のy軸方向への変位 $y(x,t)$ を考える

これについて2階の偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (t \geqq 0,\ 0 \leqq x \leqq l,\ c > 0 : 定数)$$

が成り立つ. これを波動方程式という.

例. 波動方程式を

$y(0,t) = 0$, $y(l,t) = 0$,

$y(x,0) = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} y(x,0) = \sin \frac{\pi x}{l}$ の条件のもとで解け.

答. 波動方程式をtでラプラス変換すると.

$$s^2 Y(x,s) - s\, y(x,0) - \frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y(x,s)$$

$$c^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y(x,s) - s^2 Y(x,s) = -\sin \frac{\pi x}{l} \qquad を得る.$$

境界条件のラプラス変換は.

$Y(0,s) = 0$, $Y(l,s) = 0$ となる.

さらにxでラプラス変換すると.

$$c^2 \left(\xi^2 \cdot Y^*(\xi,s) - \xi Y(0,s) - \frac{\partial}{\partial x} Y(0,s) \right) - s^2 Y^*(\xi,s) = -\frac{\pi l}{l^2 \xi^2 + \pi^2}$$

となり $\frac{\partial}{\partial x} Y(0,s) = A(s)$ とおくと.

$$(c^2 \xi^2 - s^2) Y^*(\xi,s) = c^2 A(s) - \frac{\pi l}{l^2 \xi^2 + \pi^2}$$

$$Y^*(\xi,s) = \frac{c^2 A(s)}{c^2 \xi^2 - s^2} - \frac{1}{c^2 \xi^2 - s^2} \cdot \frac{\pi l}{l^2 \xi^2 + \pi^2}$$

$$Y^*(\xi,s)=\frac{c^2A(s)}{c^2\xi^2-s^2}-\frac{\pi l}{\pi^2c^2+l^2s^2}\cdot\left(\frac{c^2}{c^2\xi^2-s^2}-\frac{l^2}{l^2\xi^2+\pi^2}\right)$$ となる.

これをラプラス逆変換して.

$$Y(x,s)=\frac{c}{s}\cdot A(s)\cdot\sinh\frac{s}{c}x-\frac{\pi l}{\pi^2c^2+l^2s^2}\left(\frac{c}{s}\sinh\frac{s}{c}x-\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi}{l}x\right)$$

を得る. $Y(l,s)=0$ より

$$0=Y(l,s)=\frac{c}{s}A(s)\cdot\sinh\frac{ls}{c}-\frac{\pi l}{\pi^2c^2+l^2s^2}\left(\frac{c}{s}\sin\frac{ls}{c}-\frac{l}{\pi}\underbrace{\sin\pi}_{=0}\right)$$

となり $A(s)=\dfrac{\pi l}{\pi^2c^2+l^2s^2}$ を得る. これを代入して.

$$Y(x,s)=\frac{l^2}{\pi^2c^2+l^2s^2}\sin\frac{\pi}{l}x$$ となる. これをtでラプラス逆変換すると.

$$y(x,s)=\frac{l}{\pi c}\cdot\sin\frac{\pi c}{l}t\cdot\sin\frac{\pi}{l}x$$ を得る.

<u>問題</u> 波動方程式を以下の条件のもとで解け.

(1) $y(0,t)=y(l,t)=0$

$y(x,0)=0$, $\dfrac{\partial}{\partial t}y(x,0)=\sin\dfrac{2\pi x}{l}$

(2) $y(0,t)=y(l,t)=0$

$y(x,0)=\sin\dfrac{\pi x}{l}$, $y_t(x,0)=0$

ヒント(解き方)

① tでラプラス変換 ② 境界条件もラプラス変換

③ $\dfrac{\partial}{\partial x}Y(0,s)=A(s)$ とおいて. 全体をxでラプラス変換.

④ $Y^*(\xi,s)$について解き、xでラプラス逆変換

⑤ $A(s)$を特定. ⑥ tでラプラス逆変換.

解答 (1). tでラプラス変換すると.

$$c^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}Y(x,s)-s^2Y(x,s)=-\sin\frac{2\pi x}{l}$$ となる. また

$Y(0,s)=0,\ Y(l,s)=0$ を得る. さらにxでラプラス変換すると.

$$(c^2\xi^2-s^2)Y^*(\xi,s)=c^2\cdot A(s)-\frac{2\pi l}{l^2\xi^2+4\pi^2}$$

$$Y^*(\xi,s)=\frac{c^2A(s)}{c^2\xi^2-s^2}-\frac{1}{c^2\xi^2-s^2}\cdot\frac{2\pi l}{l^2\xi^2+4\pi^2}$$

$$=\frac{c^2\cdot A(s)}{c^2\xi^2-s^2}-\frac{2\pi l}{4\pi^2c^2+l^2s^2}\left(\frac{c^2}{c^2\xi^2-s^2}-\frac{l^2}{l^2\xi^2+4\pi^2}\right)$$

を得る. これをラプラス逆変換すると

$$Y(x,s)=\frac{c}{s}A(s)\cdot\sinh\frac{s}{c}x-\frac{2\pi l}{4\pi^2c^2+l^2s^2}\left(\frac{c}{s}\sinh\frac{s}{c}x-\frac{l}{2\pi}\sin\frac{2\pi}{l}x\right)$$

となる $Y(l,s)=0$ より

$$A(s)=\frac{2\pi l}{4\pi^2c^2+l^2s^2}$$ となり

$$Y(x,s)=\frac{l^2}{4\pi^2c^2+l^2s^2}\sin\frac{2\pi}{l}x$$ となる. これをラプラス逆変換して.

$$y(x,s)=\frac{l}{2\pi c}\sin\frac{2\pi c}{l}t\cdot\sin\frac{2\pi}{l}x$$ を得る.

(2)　tでラプラス変換すると.

$$c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} Y(x,s) - s^2 Y(x,s) = -s \cdot \sin\frac{\pi x}{l}$$ となる. 境界条件は

$Y(0,s)=0$, $Y(l,s)=0$　となる. xでラプラス変換すると

$$(c^2\xi^2 - s^2)\,Y^*(\xi,s) = c^2 A(s) - \frac{\pi l s}{l^2\xi^2+\pi^2}$$

$$Y^*(\xi,s) = \frac{c^2 A(s)}{c^2\xi^2-s^2} - \frac{1}{c^2\xi^2-s^2}\cdot\frac{\pi l s}{l^2\xi^2+\pi^2}$$

$$= \frac{c^2 A(s)}{c^2\xi^2-s^2} - \frac{\pi l s}{\pi^2c^2+l^2s^2}\left(\frac{c^2}{c^2\xi^2-s^2} - \frac{l^2}{l^2\xi^2+\pi^2}\right)$$

となる. これをラプラス逆変換すると.

$$Y(x,s) = \frac{c}{s}\cdot A(s)\cdot \sinh\frac{l}{c}s - \frac{\pi l s}{\pi^2c^2+l^2s^2}\left(\frac{c}{s}\sin\frac{sx}{c} - \frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi}{l}x\right)$$

を得る. $Y(l,s)=0$　より

$$A(s) = \frac{\pi l s}{\pi^2c^2+l^2s^2}$$ となり

$$Y(x,s) = \frac{l^2 s}{\pi^2c^2+l^2s^2}\cdot\sin\frac{\pi}{l}x$$ となり

$$y(x,t) = \cos\frac{\pi c}{l}t \cdot \sin\frac{\pi}{l}x$$ となる