有理関数のラプラス逆変換.

有理関数は.部分分数にすると.ラプラス変換が求まる場合がある.

例題 $L^{-1}\left(\dfrac{s^2-s+3}{(s-2)^3}\right)$ を求めよ.

答. $\dfrac{s^2-s+3}{(s-2)^3} = \dfrac{A}{(s-2)^3} + \dfrac{B}{(s-2)^2} + \dfrac{C}{s-2}$ とおくと.

$= \dfrac{s^2 \cdot C + (B-4C)s + (A-2B+4C)}{(s-2)^3}$ より

$\begin{cases} C = 1 \\ B-4C = -1 \\ A-2B+4C = 3 \end{cases}$ より $\begin{cases} A = 5 \\ B = 3 \\ C = 1 \end{cases}$ となる

これより $L^{-1}\left(\dfrac{s^2-s+3}{(s-2)^3}\right) = 5 \cdot L^{-1}\left(\dfrac{1}{(s-2)^3}\right) + 3 \cdot L^{-1}\left(\dfrac{1}{(s-2)^2}\right) + L^{-1}\left(\dfrac{1}{s-2}\right)$

$= \dfrac{5}{2} \cdot e^{2t} \cdot t^2 + 3 \cdot e^{2t} \cdot t + e^{2t}$

問題 ラプラス逆変換を求めよ

(1) $\dfrac{2s+7}{s^2+5s+6}$ (2) $\dfrac{5}{(s+2)(s^2+1)}$

答 (1) $\dfrac{2s+7}{s^2+5s+6} = \dfrac{2s+7}{(s+2)(s+3)} = \dfrac{3}{s+2} - \dfrac{1}{s+3}$ より

$L^{-1}\left(\dfrac{2s+7}{s^2+5s+6}\right) = 3L^{-1}\left(\dfrac{1}{s+2}\right) - L^{-1}\left(\dfrac{1}{s+3}\right)$

$= 3 \cdot e^{-2t} - e^{-3t}$

(2). $\dfrac{5}{(s+2)(s^2+1)} = \dfrac{A}{s+2} + \dfrac{Bs+C}{s^2+1}$ とおくと

$$= \frac{As^2 + A + Bs^2 + 2Bs + Cs + 2C}{(s+2)(s^2+1)}$$ より

$A=1,\ B=-1,\ C=2$ より

$$\frac{5}{(s+2)(s^2+1)} = \frac{1}{s+2} + \frac{-s+2}{s^2+1}$$

$$\therefore\ \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{5}{(s+2)(s^2+1)}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^2+1}\right) + 2\cdot\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

$$= e^{-2t} - \cos t + 2\cdot\sin t$$ である.

<u>ラプラス逆変換からみた合成法則</u>.

$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t)$, $\mathcal{L}^{-1}(G(s)) = g(t)$ のとき.

$\mathcal{L}^{-1}(F(s)\cdot G(s)) = f*g\,(t)$ である.

<u>例題</u>. $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right)$ を求めよ

答. $F(s) = \dfrac{1}{s^2+1}$ とおくと. $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \sin t$ より

$\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{(s^2+1)^2}\right) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)\cdot F(s)) = f*f\,(t) = \sin t * \sin t$ である さらに.

$$\sin t * \sin t = \int_0^t \sin s\cdot\sin(t-s)\cdot ds$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^t \cos(t-2s) - \cos t \ ds = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}\sin(t-2s)\right]_0^t - \frac{1}{2}\left[s\cdot\cos t\right]_0^t$$

$$= -\frac{1}{4}\sin(-t) + \frac{1}{4}\sin t - \frac{1}{2}\,t\cdot\cos t$$

$$= \frac{1}{2}\sin t - \frac{1}{2}t\cdot\cos t.$$

問題．合成法則を用いて．ラプラス逆変換を求めよ．

(1) $\dfrac{1}{(s-\lambda)(s-\mu)}$ $(\lambda \neq \mu)$　(2) $\dfrac{1}{s^2(s+\lambda)}$

答．(1) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s-\lambda}\cdot\dfrac{1}{s-\mu}\right) = e^{\lambda t} * e^{\mu t}$

$$= \int_0^t e^{\lambda s}\cdot e^{\mu(t-s)}\cdot ds = \int_0^t e^{\mu t+(\lambda-\mu)s}\cdot ds$$

$$= \frac{1}{\lambda-\mu}\left[e^{\mu t+(\lambda-\mu)s}\right]_0^t = \frac{1}{\lambda-\mu}\left(e^{\lambda t}-e^{\mu t}\right)$$

(2) $L^{-1}\left(\dfrac{1}{s^2}\cdot\dfrac{1}{s+\lambda}\right) = t * e^{-\lambda t}$

$$= \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\cdot s\cdot ds = \left[\frac{1}{\lambda}s\cdot e^{-\lambda(t-s)}\right]_0^t - \frac{1}{\lambda}\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}ds$$

$$= \frac{1}{\lambda}t - \frac{1}{\lambda}\left[\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda(t-s)}\right]_0^t = \frac{1}{\lambda}t - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda t}$$

ラプラス変換を使って微分方程式を解く．

微分方程式 —ラプラス変換→ 代数方程式

↓　　　　　　　　　　　　　↓

微分方程式の解 ←ラプラス逆変換— 代数方程式の解

微分方程式を直接解くのではなく．ラプラス変換を使って代数方程式にしてから解く．

よく使う式．$L(x(t)) = X(s)$ とするとき．

$$L(x'(t)) = s\cdot X(s) - x(0)$$

$$L(x''(t)) = s^2 X(s) - x(0)\cdot s - x'(0)$$

初期値問題

例題

$x''(t)-6x'(t)+9x(t)=0$, $x(0)=1$, $x'(0)=-1$ を解け.

答. 両辺をラプラス変換すると.

$$L(x''(t))-6L(x'(t))+9\cdot L(x(t))=0$$

$$s^2X(s)-s+1-6(sX(s)-1)+9X(s)=0 \qquad \cdots ☆$$

$$(s^2-6s+9)X(s)=s-7.$$

$$X(s)=\frac{s-7}{s^2-6s+9}=\frac{1}{s-3}-\frac{4}{(s-3)^2}$$ より

$$x(t)=L^{-1}(X(s))=L^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right)-4\cdot L^{-1}\left(\frac{1}{(s-3)^2}\right)$$

$$=e^{3t}-4\cdot t\cdot e^{3t}$$ となる.

ここで ☆ のように.両辺をラプラス変換してえられた方程式を

像方程式 という.

問題

次の微分方程式を解け.

(1) $x'(t)-3(t)=e^{2t}$, $x(0)=2$

(2) $x''(t)+4x'(t)+4x(t)=0$, $x(0)=1$, $x'(0)=-3$

答. (1) 両辺をラプラス変換すると.

$$L(x'(t)) - 3L(x(t)) = L(e^{2t})$$

$$sX(s) - 2 - 3X(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$(s-3)X(s) = \frac{1}{s-2} + 2 = \frac{2s-3}{s-2}$$

$$X(s) = \frac{2s-3}{(s-3)(s-2)} = \frac{3}{s-3} - \frac{1}{s-2}$$ である.

$$\therefore\ x(t) = L^{-1}(X(s)) = 3\cdot L^{-1}\left(\frac{1}{s-3}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{s-2}\right) = 3\cdot e^{3t} - e^{2t}$$

(2) 両辺をラプラス変換すると.

$$L(x''(t)) + 4\cdot L(x'(t)) + 4\cdot L(x(t)) = 0$$

$$s^2X(s) - s + 3 + 4(sX(s) - 1) + 4(X(s)) = 0$$

$$(s^2+4s+4)X(s) = s+1$$

$$X(s) = \frac{s+1}{s^2+4s+4} = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2}$$ より

$$x(t) = L^{-1}\left(\frac{1}{s+2}\right) - L^{-1}\left(\frac{1}{(s+2)^2}\right) = e^{-2t} - t\cdot e^{-2t}$$ となる.