線形代数学　練習問題

1. $\mathbb{R}^2$ において，$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ が生成系になっていることを示せ.

2. $\mathbb{R}^3$ において，$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ が生成系になっていることを示せ.

3. $\mathbb{R}^3$ の部分空間 W_1, W_2 を

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x + y + z = 0 \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ : \ x = y = z \right\}$$

とするとき，W_1, W_2 を $\langle a, b \rangle$ の形で表せ．また，$W_1 \cap W_2$ を求めよ.

4. $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 を

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x + y + z + w = 0 \\ x + 2y + z + 2w = 0 \end{array} \right\}, \\ W_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x = y \\ 2x + y + z + 2w = 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

とするとき，W_1, W_2 を $\langle a, b \rangle$ の形で表せ．また，$W_1 \cap W_2$ を求めよ.

5. 次のベクトルが１次独立であるかどうか判定せよ.

   (a) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

   (b) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

   (c) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (d) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

6. 次のベクトルがそれぞれ $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

(a) $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(b) $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

7. $\mathbb{R}^3$ の部分空間 W_1, W_2 を

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y+z=0 \right\}, \quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,:\, x=2y=3z \right\}$$

とするとき，$W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ の次元をそれぞれ求めよ.

8. $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 を

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,:\, \begin{array}{l} x+y+z+w=0 \\ x+2y+z+2w=0 \end{array} \right\}, \\ W_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,:\, \begin{array}{l} x=3z \\ 3x+y+z+3w=0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

とするとき，$W_1, W_2, W_1 \cap W_2, W_1 + W_2$ の次元をそれぞれ求めよ.

9. $\mathbb{R}^3$ の 3 つのベクトル $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ から正規直交基底を作れ.

10. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

と定めるとき，$\ker f$ の基底と次元を求めよ.

11. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ を

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

と定めるとき，基底 $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ と基底 $u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に関する f の表現行列を求めよ．

12. $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ とするとき，$\{v_1, v_2\}$ から $\{e_1, e_2\}$ への基底の変換行列を求めよ．

13. $\mathbb{R}^3$ の二つの基底を

$$[v_1, v_2, v_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad [u_1, u_2, u_3] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とするとき，$\{v_1, v_2, v_3\}$ から $\{u_1, u_2, u_3\}$ への基底の変換行列を求めよ．

14. 次の行列の固有多項式と固有値を求めよ．

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (2) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

15. 次の行列の固有値と各固有値に属する固有ベクトルを一つずつ求めよ．

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad (2) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

16. 次の行列の固有値と各固有値の重複度を求めよ．

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad (2) \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

17. 次の行列が対角化可能か判定し，可能であれば対角化せよ．

$$(1) \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \quad (2) \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4) \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$