線形代数学　　平成23年度前期　期末試験問題

注意：途中計算は多少省略しても構わないが，解答の求め方がわかるよう記述すること．また，解答の順番は問わない．

1. 次のベクトルが $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.（15点）

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. 線形空間 V のベクトル $v_1, \ldots, v_n$ が1次独立であるとき，$m < n$ である m に対し，$v_1, \ldots, v_m$ が1次独立であることを示せ.（5点）

3. $\mathbb{R}^4$ の部分空間 W_1, W_2 を

$$\begin{aligned} W_1 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ :\ \begin{array}{l} x+y+z+w=0 \\ x+2y+z+2w=0 \end{array} \right\}, \\ W_2 &= \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \ :\ \begin{array}{l} x=y \\ 2x+y+z+2w=0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

とするとき，W_1, W_2 を $\langle a, b \rangle$ の形で表せ．また，$W_1 \cap W_2$ を求めよ.（15点）

4. $\mathbb{R}^3$ の3つのベクトル $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ から正規直交基底を作れ.（15点）

5. $\mathbb{R}^3$ の二つの基底 $\{v_1, v_2, v_3\}$ と $\{u_1, u_2, u_3\}$ を

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} u_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

とするとき，$\{v_1, v_2, v_3\}$ から $\{u_1, u_2, u_3\}$ への基底の変換行列を求めよ.（15点）

6. 次の行列が対角化可能か判定し，可能であれば対角化せよ.（35点）

$$(1)\quad A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \qquad (2)\quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$