解答例

1. $A=[v_1\ v_2\ v_3]=\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&0&-1\\3&1&2\end{bmatrix}$ とおき rank を調べると.

$$\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&-2&1\\2&0&-1\\3&1&2\end{bmatrix}\underset{\substack{②-①\times2\\③-①\times3}}{=}\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&4&-3\\0&7&-1\end{bmatrix}\underset{\substack{③-②\\\times\frac{7}{4}}}{=}\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&-2&1\\0&4&-3\\0&0&\frac{17}{4}\end{bmatrix}=3.$$

∴ v_1, v_2, v_3 は1次独立. また $\dim\mathbb{R}^3=3$ より. 3つの1次独立なベクトルの組は必ず基底になるので. v_1, v_2, v_3 は基底である

2. $v_1,\cdots,v_m$ が1次従属とすると. $a_1v_1+\cdots+a_mv_m=0$ に自明でない解 $a_1,\cdots,a_m$ が存在する. このとき. $a_1v_1+\cdots+a_mv_m+0\cdot v_{m+1}+\cdots+0\cdot v_n=0$ となるので. $v_1,\cdots,v_n$ が1次独立であることに矛盾する. ∴ $v_1,\cdots,v_m$ は1次独立.

3. $\begin{cases}x+y+z+w=0\\x+2y+z+2w=0\end{cases}$ を解くと. $\begin{cases}x+z=0\\y+w=0\end{cases}$ より. $x=t$, $y=s$ として一般解は.

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\s\\-t\\-s\end{bmatrix}=t\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}+s\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$$ となる. ∴ $W_1=\left\langle\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}\right\rangle$

$\begin{cases}x=y\\2x+y+z+2w=0\end{cases}$ を解くと. $x=t$, $w=s$ として. $y=t$. $z=-3t-2s$ となる.

これより一般解は

$$\begin{bmatrix}x\\y\\z\\w\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t\\t\\-3t-2s\\s\end{bmatrix}=t\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\-3\\0\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}0\\0\\-2\\1\end{bmatrix}$$ となる. ∴ $W_2=\left\langle\begin{bmatrix}1\\1\\-3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0\\0\\-2\\1\end{bmatrix}\right\rangle$.

$$\begin{cases} x+y+z+w=0 \\ x+2y+z+2w=0 \\ x=y \\ 2x+y+z+2w=0 \end{cases}$$ を解くと．$x=y=-z=-w$ より 一般解は $x=t$として

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ -t \\ -t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$ となる $\therefore W_1 \cap W_2 = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$

4. $\|v_1\| = \langle v_1, v_1 \rangle^{\frac{1}{2}} = 2$ より

$$u_1 = \frac{1}{2} v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ となる.

$$u_2' = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$u_2 = \frac{1}{\|u_2'\|} u_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ である.

$$u_3' = v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ となり. $u_3 = \frac{1}{\|u_3'\|} u_3' = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である.

この $\{u_1, u_2, u_3\}$ が正規直交基底である.

5. Aを基底の変換行列とすると. $[u_1\ u_2\ u_3] = [v_1\ v_2\ v_3] A$ より

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

である

6.(1).

$$\varphi_A(t)=\begin{vmatrix} t-2 & 2 & 0 \\ -1 & t+3 & -1 \\ 0 & 2 & t-2 \end{vmatrix} = (t-2)^2(t+3)+2(t-2)+2(t-2)=(t-2)(t+2)(t-1)$$

より固有値は 1, 2, −2. 異なる3つの固有値があるので対角化可能

固有値 1 の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ が挙げられる.}$$

固有値 2 の固有ベクトルは.

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ が挙げられる.}$$

固有値 −1 の固有ベクトルは

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \text{より} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ が挙げられる.}$$

$$\therefore P=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ とすれば.} \quad P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \text{ となる}$$

(2)

$$\varphi_B(t)=\begin{vmatrix} t-1 & -1 & 1 \\ -1 & t & 0 \\ 0 & -1 & t \end{vmatrix} = t^2(t-1)+1-t = (t+1)(t-1)^2$$

より固有値は 1 と −1, 重複度はそれぞれ 2 と 1. ここで

$$\mathrm{rank}(E-A)=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \underset{③-①}{\overset{②\leftrightarrow①}{=}} \mathrm{rank}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2 \neq 3-2 = \dim\mathbb{R}^3 - \text{重複度}$$

であるので対角化不可能である.