内積

${}^\forall x, y \in V$ に対し、実数 $(x|y)$ が定まり、次の条件をみたすとき、

$(x|y)$ を x と y の内積 という。以下、$x, y, z \in V$、$r \in \mathbb{R}$ とする。

(1) $(x|x) \geqq 0$ かつ $(x|x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

(2) $(x|y) = (y|x)$

(3) $(x+y|z) = (x|z) + (y|z)$

$(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$

(4) $(rx|y) = (x|ry) = r \cdot (x|y)$

例1. $\mathbb{R}^n \ni x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$ に対し、

$(x|y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$ とすると、これは内積の定義をみたす。

この内積を $\mathbb{R}^n$ の標準内積 といい、$\mathbb{R}^n$ に標準内積を与えた空間を

ユークリッド空間 という。

→ 高校で習った内積はこの標準内積である。

この内積があると、ベクトルの長さと角度が定義できる

定義 4.8. ${}^\forall x, y \in V$ に対し、

$\|x\| = (x|x)^{\frac{1}{2}}$ を ベクトル x の長さ あるいは ノルム という。

$\cos\theta = \dfrac{(x|y)}{\|x\| \cdot \|y\|}$ をみたす θ を x と y のなす角という。

とくに $\theta = \frac{\pi}{2}$ つまり $(x|y) = 0$ のとき、x と y は直交する という。

例2　$\mathbb{R}^2$ において．$x=(x_1, x_2)$ のとき

$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ であったが．これは $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ と一致．

なす角 θ も同様である．

例3．$[0, 2\pi]$ 上の連続関数 f, g に対し．

$(f|g) = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x)\, dx$ で内積を定義することができる．

∵ (1) $(f|f) = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx \geqq 0$ である．0 になるのは $f(x)=0$ のときだけ．

(2) $(f|g) = \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x)\, dx = \int_0^{2\pi} g(x) \cdot f(x)\, dx = (g|f)$

(3) $(f+g|h) = \int_0^{2\pi} (f(x)+g(x)) \cdot h(x) = \int_0^{2\pi} f(x)h(x) + g(x)h(x)\, dx$

$= (f|h) + (g|h)$ 　2式も同様

(4) $(r \cdot f|g) = \int_0^{2\pi} r \cdot f(x) \cdot g(x) = r \cdot \int_0^{2\pi} f(x) \cdot g(x) = r(f|g)$．2式も同様．

→ つまり関数に対しても．長さや角度を定義できる．

定義4.9．$x_1, \cdots, x_n \in V$ が

$(x_i|x_j) = 0 \quad (i \neq j)$ をみたすとき．

$x_1, \cdots, x_n$ を直交系という．さらに

$(x_i|x_i) = 1 \quad (1 \leqq i \leqq n)$ をみたすとき．

$x_1, \cdots, x_n$ を正規直交系という．さらにこれらが基底のとき．

$x_1, \cdots, x_n$ を正規直交基底という．

定理．$x_1, \cdots, x_n \in V$ が V の正規直交基底のとき．$^\forall x \in V$ は．

$x = \sum_{i=1}^{n} (x|x_i) \cdot x_i$ 　とできる

→ 実は無限次元でも成り立ち．フーリエ級数のもとになっている．

命題4.18(改)

$v_1,\cdots,v_n\in V$ を基底とするとき、正規直交基底 $u_1,\cdots,u_n$ が存在する.

∵ $u_1=\dfrac{v_1}{\|v_1\|}$ とすれば. $\|u_1\|=\left(\dfrac{v_1}{\|v_1\|},\dfrac{v_1}{\|v_1\|}\right)^{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\|v_1\|}\cdot(v_1|v_1)=1$ となる

さらに $\langle v_1\rangle=\langle u_1\rangle$ が成り立つ.

次に $u_2'=v_2-(v_2|u_1)u_1$ とおくと. v_1,v_2 が1次独立より $u_2'\neq 0$

さらに $u_2=\dfrac{u_2'}{\|u_2'\|}$ とおくと. $\|u_2\|=1$ であり.

$$(u_2|u_1)=\left(\frac{v_2-(v_2|u_1)u_1}{\|u_2'\|}\,\middle|\,u_1\right)=\frac{1}{\|u_2'\|}(v_2-(v_2|u_1)u_1,u_1)$$

$$=\frac{1}{\|u_2'\|}\cdot(v_2|u_1)-\frac{1}{\|u_2'\|}((v_2|u_1)u_1,u_1)$$

$$=\frac{1}{\|u_2'\|}(v_2|u_1)-\frac{1}{\|u_2'\|}(v_2|u_1)(u_1,u_1)=0$$ となり u_1 と u_2 は直交.

さらに $\langle v_1,v_2\rangle=\langle u_1,u_2\rangle$ もわかる.

次に. $u_3'=v_3-(v_3|u_1)u_1-(v_3|u_2)u_2$ とおくと. $u_3'\neq 0$ となり.

さらに $u_3=\dfrac{u_3}{\|u_3'\|}$ とおくと $\|u_3\|=1$ となる. さらに.

$$(u_3|u_1)=\left(\frac{v_3-(v_3|u_1)u_1-(v_3|u_2)u_2}{\|u_3'\|}\,\middle|\,u_1\right)$$

$$=\frac{1}{\|u_3'\|}(v_3|u_1)-\frac{1}{\|u_3'\|}(v_3|u_1)(u_1|u_1)-\frac{1}{\|u_3'\|}(v_3|u_2)(u_2|u_1)=0$$

となる. $(u_3|u_2)=0$ も同様で. u_1,u_2,u_3 は正規直交系になる

さらに $\langle v_1,v_2,v_3\rangle=\langle u_1,u_2,u_3\rangle$ もわかる.

以下くり返せば. 正規直交基底 $u_1,\cdots,u_n$ を得る.

この方法を グラムシュミットの直交化法 という.

例題. $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ から正規直交基底を作れ.

答. $\|v_1\| = \left(\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} = 2$ より $u_1 = \frac{1}{2} v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ となる

$$u_2' = v_2 - (v_2 | u_1) u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\|u_2'\| = \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ より $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} u_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる.

$$u_3' = v_3 - (v_3 | u_1) u_1 - (v_3 | u_2) u_2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$ となる

$\|u_3'\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ より $u_3 = \sqrt{2} \cdot u_3' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる.

問題. 次の v_1, v_2, v_3 から正規直交基底を作れ.

(1) $v_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

答(1) $\|v_1\|=3$ より $u_1=\frac{1}{3}v_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$ である.

$$u_2'=v_2-(v_2|u_1)u_1=\begin{bmatrix}1\\3\\0\end{bmatrix}-1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\\0\end{bmatrix}$$

$\|u_2'\|=3$ より $u_2=\frac{1}{3}u_2'=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ である.

$$u_3'=v_3-(v_3|u_1)u_1-(v_3|u_2)u_2=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-1\cdot\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}-1\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

$\|u_3'\|=1$ より $u_3=u_3'$

(2) $\|v_1\|=\sqrt{3}$ より $u_1=\frac{1}{\sqrt{3}}v_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$ である

$$u_2'=v_2-(v_2|u_1)u_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}-\frac{6}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$$

$\|u_2'\|=\sqrt{2}$ より $u_2=\frac{1}{\sqrt{2}}u_2'=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$ である.

$$u_3'=v_3-(v_3|u_1)u_1-(v_3|u_2)u_2=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}-\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{6}\\-\frac{1}{3}\\\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

$\|u_3'\|=\frac{1}{\sqrt{6}}$ より $u_3=\sqrt{6}\cdot u_3'=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\-2\\1\end{bmatrix}$ である.