例題. $\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ が$\mathbb{R}^3$の基底であることを示せ.

∵ $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ とすると.

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{②-①}{=} \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{③-②\times 3}{=} \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$$

より. v_1, v_2, v_3 は1次独立.

また. ${}^\forall \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し.

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

となる a, b, c を考える. するとこれは.

$$\begin{cases} a + b + c = x \\ a + 2b + c = y \\ 3b + c = z \end{cases}$$

の連立方程式になっているので. これを解けば.

$$\begin{cases} a = -x + 2y - z \\ b = y - x \\ c = 3x - 3y + z \end{cases}$$

となる. すなわち $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (-x+2y-z) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (y-x) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (3x-3y+z) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

と $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ の1次結合でかける. ∴ $\mathbb{R}^3 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ となり.

$\{v_1, v_2, v_3\}$ は基底になる

<u>問題</u>. (1) $\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ が $\mathbb{R}^2$ の基底であることを示せ.

(2) $\left\{ v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ が $\mathbb{R}^3$ の基底であることを示せ.

答 (1). $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ とすると.

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{②-①\times\frac{3}{2}}{=} \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = 2$ より. v_1, v_2 は1次独立.

また $\forall \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対し. $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ を解くと.

$\begin{cases} a = y - x \\ b = 3x - 2y \end{cases}$ となる $\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (y-x) \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (3x-2y) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ となり

$\mathbb{R}^2 = \langle v_1, v_2 \rangle$ である. $\therefore \{v_1, v_2\}$ は基底になる.

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とすると

$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{②-①}{=} \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = 3$ より. v_1, v_2, v_3 は1次独立.

また. $\forall \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ に対し. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ を解くと.

$\begin{cases} a = \frac{1}{2}(x+y) \\ b = \frac{1}{2}(x-y) \\ c = z \end{cases}$ となり. $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(x+y) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}(x-y) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる

$\therefore \mathbb{R}^3 = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ であり $\{v_1, v_2, v_3\}$ は基底になる

次元.

補題 4.8:

V のベクトル $a_1, a_2, \cdots, a_n$ が それぞれベクトル $b_1, \cdots, b_m$ の 1次結合で表されていたとする. もし. $n > m$ ならば. $a_1, \cdots, a_n$ は 1次従属である.

(∵) まず. 仮定より.

$$a_1 = c_{11} b_1 + c_{21} b_2 + \cdots + c_{m1} b_m$$

$$a_2 = c_{12} b_1 + c_{22} b_2 + \cdots + c_{m2} b_m$$

$$\vdots$$

$$a_n = c_{1n} b_1 + c_{2n} b_2 + \cdots + c_{mn} b_m$$

とできている. これを行列でかくと.

$$[a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n] = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_m] \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

と表せる.

これらは数字でなくベクトルである

ここで $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対し. 方程式 $\begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$ を考えると.

$m < n$ より. 自明でない解. x をもつ. これより

$$[a_1 \ a_2 \ \cdots \ a_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_m] \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = 0$$

となり.

$x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n = 0$ となる. $x_1, \cdots, x_n$ には 0 でないものが含まれるので. $a_1, \cdots, a_n$ は 1次従属である.

定理 4.9.

$\{v_1, \cdots, v_n\}$, $\{u_1, \cdots, u_m\}$ が V の基底であるとき. $n=m$ である.

もし. $n>m$ であるとすると.

$v_1, \cdots, v_n$ は $u_1, \cdots, u_m$ の1次結合で表せるので. 補題4.8より

$v_1, \cdots, v_n$ は1次従属になる. しかし. これは矛盾. $\therefore$ $n \leqq m$ である.

同様に $m \leqq n$ もわかるので. $m=n$ となる.

定義4.7.

V の基底の個数を V の次元といい. $\dim V$ で表す.

また $\dim\{0\}=0$ と定める.

例. $\mathbb{R}^n$ は $\{e_1, \cdots, e_n\}$ を基底にもつので. $\dim \mathbb{R}^n = n$ である.

例題. $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x+y=0 \right\}$ の次元を求めよ.

答. 方程式 $x+y=0$ を解くと. $x=t$ とおいて. $y=-t$ となる

$\therefore$ 一般解は $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ -t \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ となるので.

$V = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ となる. これより $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ が V の基底であるので.

$\dim V = 1$ である

問題 (1) $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x+2y=0 \right\}$ の次元を求めよ

(2) $V = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x+y+z=0 \right\}$ の次元を求めよ.

答. (1) $x+2y=0$ を解くと. $y=t$ とおいて $x=-2t$ となる

∴一般解は $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2t \\ t \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ となり

$V = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$ である. $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ は V の基底であるので.

$\dim V = 1$ である

(2) $x+y+z=0$ を解くと. $x=s$, $y=t$ とおいて $z=-s-t$ となる

∴一般解は $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \\ -s-t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ となり

$V = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$ である. このベクトルは1次独立なので.
(証明は省略)

$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ は V の基底になる. ∴ $\dim V = 2$ である.

命題 4.10.

V が n 次元であるための必要十分条件は.

1次独立なベクトルの最大個数が n であることである.

さらにこのとき, 1次独立な n 個のベクトルは V の基底になる.

∵ ① Vがn次元であるとし、$\{v_1, \cdots, v_n\}$をVの基底とする。

$^\forall w_1, \cdots, w_{n+1} \in V$ をとったとき、

$w_1, \cdots, w_{n+1}$ はそれぞれ $v_1, \cdots, v_n$ の1次結合で表される。

∴補題4.8より、$w_1, \cdots, w_{n+1}$ は1次従属になる。

∴1次独立な最大個数は n である

② Vに含まれる1次独立なベクトルの最大個数をnとし、

それを $v_1, \cdots, v_n$ とする。

$^\forall u \in V$ に対し、 $v_1, \cdots, v_n, u$ は1次従属なので、命題4.7(3)より

uは$v_1, \cdots, v_n$の1次結合で表せる。

∴ $V = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$ となり、$\{v_1, \cdots, v_n\}$はVの基底になる。