例. (2-3と2-4の間に追加)

(1) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ を考える.

$r\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+s\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}=0$ とすると $\begin{bmatrix}r+s\\r+2s\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$ より $\begin{cases}r=0\\s=0\end{cases}$ となる

よって. $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$ と $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ は1次独立.

(2) $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ を考える. 例えば.

$-2\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2+1+1\\-2+2+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=0$ となるので.

$r_1\cdot\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}+r_2\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}+r_3\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=0$ とおいても. $r_1=r_2=r_3=0$ とならない $r_1, r_2, r_3$ がある.

これより $\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ は1次従属.

例. (2-4, 命題4.4のあとで)

(1). $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ に対し. $A=\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}$ とおくと

$\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1\\1&2\end{bmatrix}\overset{②-①}{=}\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}=2$ となり.

ベクトルの個数とrankが等しいので 1次独立.

(2). $\mathbb{R}^2 \ni \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ に対し. $A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&0\end{bmatrix}$ とおくと.

$\mathrm{rank}\,A=\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&0\end{bmatrix}\overset{②-①}{=}\mathrm{rank}\begin{bmatrix}1&1&1\\0&1&0\end{bmatrix}=2$ となり 1次従属

系4.5. $v_1, \cdots, v_k \in \mathbb{R}^n$ が1次従属であるための必要十分条件は

$\operatorname{rank} A < k$ である.

系4.6. (1) $k > n$ ならば, $v_1, \cdots, v_k$ はつねに1次従属.

(2). 次は互いに同値.

(a) $v_1, \cdots, v_n$ は1次独立.

(b) $\operatorname{rank} A = n$

(c) $|A| \neq 0$

(d) $A$ は正則行列.

問題. 次のベクトルが1次独立かどうか判定せよ.

(1) $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ (2) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ (3) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

答 (1) $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ とすると

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \overset{②-①\times\frac{3}{2}}{=} \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -\frac{7}{2} \end{bmatrix} = 2$$ より 1次独立.

(2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ とすると

$$\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{③-①,\ ③-①}{=} \operatorname{rank} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = 3$$ より 1次独立

(3) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$ とおくと

$$\mathrm{rank}\,A = \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix} \overset{③-①,②-①}{=} \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \overset{③-②\times 2}{=} \mathrm{rank}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$$

より 1次従属.

<u>命題 4.7.</u> $V$ において. 次が成り立つ.

(1). $v_1, \cdots, v_n$ が 1次独立なら. $s \leqq n$ に対し.

$v_1, \cdots, v_s$ が 1次独立.

(2). $v_1, \cdots, v_n$ が 1次従属なら. $\forall u \in V$ に対し.

$v_1, \cdots, v_n, u$ が 1次従属.

(3) $v_1, \cdots, v_n$ が 1次独立, $v_1, \cdots, v_n, u$ が 1次従属なら.

$u$ は $v_1, \cdots, v_n$ の 1次結合でかける (さらにその表し方は一意).

(∵) (1). $r_1 v_1 + \cdots + r_s v_s = 0$ とすると

$r_1 v_1 + \cdots + r_s v_s + 0 \cdot v_{s+1} + \cdots + 0 \cdot v_n = 0$ より.

$r_1 = \cdots = r_s = 0$ でないといけない. ∴ 1次独立

(2) $r_1, \cdots, r_n$ を, 少なくとも1つは0でない数で.

$r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n = 0$ とすると.

$r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n + 0 \cdot u = 0$ となる.

∴ $v_1, \cdots, v_n, u$ は 1次従属.

(3) $r_1, \cdots, r_n, s$ を少なくとも1つが0でない数で.

$r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n + s u = 0$ とする もし $s=0$ なら.

$r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n = 0$ より $r_1 = \cdots = r_n = 0$ となってしまうので. $s \neq 0$.

$\therefore$ $u = -\frac{r_1}{s} v_1 - \frac{r_2}{s} v_2 - \cdots - \frac{r_n}{s} v_n$ とできる.

定義4.6. $v_1, \cdots, v_n \in V$ が次の2つをみたすとき.

ベクトルの組 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ を $V$ の基底という.

(1). $v_1, \cdots, v_n$ は1次独立

(2) $V = \langle v_1, \cdots, v_n \rangle$.

注. (2)の条件は $\forall v \in V$ が $v_1, \cdots, v_n$ の1次結合で表せることを表している.

この(2)をみたす $v_1, \cdots, v_n$ のことを $V$ の生成系という.

例. (1). $\mathbb{R}^3$ の基本ベクトルの組

$$\left\{ e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ は $\mathbb{R}^3$ の基底である.

$\because$ $A = [e_1, e_2, e_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ とすると

$\mathrm{rank}\, A = 3$ より $e_1, e_2, e_3$ は1次独立である.

また. $\forall v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ は, $e_1, e_2, e_3$ を用いて

$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = x \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ と1次結合で表せるので, $\{e_1, e_2, e_3\}$ は基底である.