例題. $W = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 2x+y+3z=0 \\ 3x+2y+4z=0 \end{matrix} \right\}$ とするとき.

Wを $\langle a, b \rangle$ の形で表せ.

答. $\begin{cases} 2x+y+3z=0 \\ 3x+2y+4z=0 \end{cases}$ を解くと. $\begin{cases} x=-2z \\ y=z \end{cases}$ より

$z=t$ とおくことで一般解は

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2z \\ z \\ z \end{bmatrix} = t \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ となる $\therefore W = \left\langle \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$.

"ここでノート 1-5 の問題をやります"

命題 4.1. W_1, W_2 を V の部分空間とするとき.

$W_1 \cap W_2$ も Vの部分空間になる.

W_1にも W_2にも含まれるベクトル全体

(∵) $\mathbf{0} \in W_1$, $\mathbf{0} \in W_2$ より $\mathbf{0} \in W_1 \cap W_2$ となり空でない.

次に. $^\forall x, y \in W_1 \cap W_2$ に対し. $x, y \in W_1$ より

$x+y \in W_1$. 同様に $x+y \in W_2$ となり. $x+y \in W_1 \cap W_2$ となる.

また. $^\forall x \in W_1 \cap W_2$ と $\lambda \in \mathbb{R}$ に対し.

$\lambda x \in W_1$ かつ $\lambda x \in W_2$ となるので, $\lambda x \in W_1 \cap W_2$ となる

$\therefore W_1 \cap W_2$ は部分空間である.

定義4.4. W_1, W_2 を V の部分空間とするとき．

$$W_1 + W_2 = \{ w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2 \}$$

は．V の部分空間になる．これを W_1 と W_2 の和または和空間という．

とくに $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ のとき．$W_1 + W_2$ を W_1 と W_2 の直和といい．$W_1 \oplus W_2$ とかく．

例． $a, b \in V$ について．$W_1 = \langle a \rangle$, $W_2 = \langle b \rangle$ とすると．

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 &= \{ w_1 + w_2 \mid w_1 \in W_1,\ w_2 \in W_2 \} \\ &= \{ sa + tb \mid s, t \in \mathbb{R} \} = \langle a, b \rangle \end{aligned}$$

となる．

問題． $\mathbb{R}^3$ の部分空間

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \ x + y + z = 0 \right\},\quad W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \ x = y = z \right\}$$

とするとき．

$W_1 + W_2$ が W_1 と W_2 の直和であること（$W_1 \cap W_2 = \{0\}$）を示せ

ヒント．$W_1 = \{ w \mid 条件1 \}$，$W_2 = \{ w \mid 条件2 \}$ のとき

$W_1 \cap W_2 = \{ w \mid 条件1 かつ条件2 \}$ とできる

答． $W_1 \cap W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \middle| \ \begin{matrix} x + y + z = 0 \\ x = y = z \end{matrix} \right\}$ であるが．

$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = y \\ x = z \end{cases}$ を解くと．$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ となり

$W_1 \cap W_2 = \{0\}$ がわかる．

命題 4.2. W_1, W_2 を V の部分空間とするとき.次は同値.

(1) W_1+W_2 は直和

(2) ${}^\forall w \in W_1+W_2$ に対して. $w=w_1+w_2$ となる $w_1 \in W_1$ と $w_2 \in W_2$ が

ただ一つ存在する.

∵ (1) ⇒ (2)　2つ存在したとして.

$w = w_1 + w_2 = v_1 + v_2$　とできたとすると.

$w_1 - v_1 = v_2 - w_2 \in W_1 \cap W_2 = \{0\}$

∴ $w_1 = v_1$, $w_2 = v_2$　がわかる.

(2) ⇒ (1)　$w \in W_1 \cap W_2$ とすると.

$w = w + 0 \in W_1 + W_2$,　$w = 0 + w \in W_1 + W_2$　とできるので.

一意性から. $w = 0$ がわかる.

基底と次元

定義 4.5　$v_1, \cdots, v_k \in V$ が次の条件を満たすとき,

ベクトルの組 $v_1, \cdots, v_k$ は 1次独立 であるという

条件: $r_1, \cdots, r_k \in \mathbb{R}$　に対し.

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_k v_k = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = \cdots = r_k = 0$$

また1次独立でないときは $v_1, \cdots, v_k$ は 1次従属 であるという.

$\mathbb{R}^n$のベクトルが1次独立になる条件

$\mathbb{R}^n \ni v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \cdots, v_k = \begin{bmatrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \vdots \\ a_{nk} \end{bmatrix}$ が1次独立になる条件を考える.

$$r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_k v_k = \begin{bmatrix} r_1 a_{11} + r_2 a_{12} + \cdots + r_k a_{1k} \\ r_1 a_{21} + r_2 a_{22} + \cdots + r_k a_{2k} \\ \vdots \\ r_1 a_{n1} + r_2 a_{n2} + \cdots + r_k a_{nk} \end{bmatrix} \cdots ☆$$

であるが, 一方.

$A = [v_1\ v_2\ \cdots v_k] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix}$ と $x = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_k \end{bmatrix}$ とおくと

$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ \vdots \\ r_k \end{bmatrix} = ☆$ とできることから.

条件の式 $r_1 v_1 + \cdots r_k v_k = 0$ は $Ax = 0$ と表すことができる.

つまり. この連立方程式 $Ax = 0$ が

自明な解 $x = 0$ のみもつ $\Rightarrow$ 1次独立

それ以外の解をもつ $\Rightarrow$ 1次従属.

これと命題2.9より 次を得る.

定理4.4. $v_1, \cdots, v_k$ が1次独立であるための必要十分条件は.

$A = [v_1 \cdots v_k]$ とするとき、 $\mathrm{rank}\, A = k$ である.